

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 - Morphismes entre \mathbb{Q} et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il n'existe aucune application \mathbb{Z} -linéaire non nulle de \mathbb{Q} vers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Existe-t-il des applications \mathbb{Z} -linéaires non nulles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers \mathbb{Q} ?

Exercice 2 - Modules libres versus sommes, produits, quotients, sous-modules

(1) Soient M un A -module et N un sous-module de M . Montrez que si N et M/N sont libres, alors M est libre. (*Indication : fabriquer une base de M à partir d'une base de N et d'une base de M/N .*)

(2) Montrez que toute somme directe de A -modules libres est libre, et que tout produit fini de A -modules libres est libre. (*Remarque : ce n'est pas vrai pour un produit infini, car on peut montrer que le \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas libre.*)

(3) Soit $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Montrez que les A -modules $2A$ et $3A$ ne sont pas libres, mais que $2A \oplus 3A$ est libre de rang 1.

Exercice 3 - Modules par générateurs et relations

(1) Montrez que tout A -module admet une partie génératrice. En déduire que tout A -module est isomorphe à un quotient d'un A -module libre.

(2) Soit M un A -module. On appelle *présentation par générateurs et relations* de M la donnée d'une famille de générateurs $\{x_i\}_{i \in I}$ de M et d'une famille de générateurs $\{r_j\}_{j \in J}$ du noyau du morphisme $A^{(I)} \rightarrow M$, $e_i \mapsto x_i$. Pour $A = \mathbb{Z}[X]$, donnez une présentation par générateurs et relations du A -module $I = (2, X) \subset A$.

Exercice 4 - Algèbres par générateurs et relations

(1) Montrez que toute A -algèbre admet une partie génératrice. En déduire que toute A -algèbre est isomorphe à un quotient d'une A -algèbre de polynômes (en un nombre arbitraire de variables).

(2) Montrez que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à une sous- \mathbb{Z} -algèbre d'une \mathbb{Z} -algèbre de polynômes.

(3) Soit B une A -algèbre. On appelle *présentation par générateurs et relations* de B la donnée d'une famille de générateurs $\{x_i\}_{i \in I}$ de B et d'une famille de générateurs $\{y_j\}_{j \in J}$ du noyau du morphisme $A[X_i]_{i \in I} \rightarrow B, X_i \mapsto x_i$. Pour A égale à un corps k , donnez une présentation par générateurs et relations de la k -algèbre des polynômes en une variable X à coefficients dans k sans terme de degré 1.

Exercice 5 - Faits de base sur les modules de type fini

On rappelle qu'un A -module M est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie.

(1) Montrez qu'un A -module M est de type fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que M soit isomorphe à un quotient de A^n .

(2) Montrez que tout quotient d'un A -module de type fini est de type fini.

(3) Soit M un A -module de type fini. Montrez que toute partie génératrice de M contient une partie génératrice finie.

(4) Soit A l'anneau $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrez que $M := A$ est un A -module de type fini et que le sous-ensemble $N := \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est un sous- A -module qui n'est pas de type fini.

(5) Soient M un A -module et N un sous-module de M . Montrez que si N et M/N sont de type fini, M est de type fini.

Exercice 6 - Modules sur un anneau intègre versus espaces vectoriels
Soient A un anneau commutatif intègre, et K son corps des fractions (de sorte que A est un sous-anneau de K , et que tout élément de K est un quotient d'éléments de A).

- (1) Soit V un K -espace vectoriel. Montrez qu'une famille $(v_i)_{i \in I}$ d'éléments de V est libre si et seulement si elle est A -libre (i.e. libre dans V vu comme A -module).
- (2) Avec les notations ci-dessus, montrez que toute famille A -génératrice dans V est K -génératrice, mais que la réciproque est fautive.
- (3) Montrez que K est un A -module libre ssi $A = K$.
- (4) Montrez que K est un A -module de type fini ssi $A = K$.
- (5) Soient V et W deux K -espaces vectoriels. Montrez que toute application A -linéaire de V dans W est K -linéaire.

Exercice 7 - Générateurs des rationnels

- (1) Montrer que tout sous- \mathbb{Z} -module de type fini non nul de \mathbb{Q} est libre de rang 1. En déduire que \mathbb{Q} n'est pas de type fini.
- (2) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice du \mathbb{Z} -module \mathbb{Q} et $j \in I$. Montrer que la famille $(e_i)_{i \in I \setminus \{j\}}$ est encore génératrice.

Exercice 8 - Théorèmes d'isomorphisme

Soit N un sous-module d'un A -module M et $\pi : M \rightarrow M/N$ la projection canonique.

- (1) Montrer que $P \mapsto \pi^{-1}(P)$ établit une bijection croissante entre les sous-modules de M/N et les sous-modules de M contenant N et donner sa réciproque.
- (2) Montrer que cette bijection transforme sommes et intersections en sommes et intersections.
- (3) Montrer que, pour des sous-modules $N \subset L \subset M$, on a

$$(M/N)/(L/N) \simeq M/L.$$

- (4) Montrer que si P est un sous-module de M , on a

$$N/(N \cap P) \simeq (N + P)/P.$$