Université Rennes 1, Année 2013-2014
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 - Quotients successifs

(1) Soient A un anneau et I, J des idéaux bilatères de A tels que $I \subset J$. On note J/I l'idéal image de J dans l'anneau quotient A/I. Montrez que les anneaux $(A/I)/(J/I)$ et A/J sont isomorphes.

(2) Soient A un anneau et x, y deux éléments de A. Montrez qu'il existe des isomorphismes entre : l'anneau quotient $A/(x, y)$; l'anneau quotient de $A/(x)$ par l'idéal engendré par $\overline{y}$; l'anneau quotient de $A/(y)$ par l'idéal engendré par $\overline{x}$.

(3) Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'anneau des *entiers de Gauss*. Soit p un nombre premier. Montrez que l'idéal (p) est premier dans $\mathbb{Z}[i]$ ssi -1 n'est pas un carré modulo p. (*Indication : donnez une présentation de* $\mathbb{Z}[i]$ *comme quotient d'un anneau de polynômes à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *puis utilisez la question (2).*)

Exercice 2 - Image d'un idéal

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs.

(1) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) l'image de tout idéal de A est un idéal de B ; (ii) f est surjectif.

(2) Lorsque f est surjectif, on note I son noyau (donc f induit un isomorphisme $A/I \simeq B$). Montrez que les applications $J \mapsto f(J)$ et $K \mapsto f^{-1}(K)$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des idéaux J de A contenant I et l'ensemble des idéaux K de B.

(3) On rappelle qu'un idéal $p \subset A$ est dit *premier* lorsque l'anneau quotient A/p est intègre. Montrez que l'image réciproque d'un idéal premier de B est un idéal premier de A. Dans le cas surjectif, montrez que les bijections de la question (2) induisent des bijections entre les idéaux premiers de A contenant I et les idéaux premiers de B.

(4) On rappelle qu'un idéal $m \subset A$ est dit *maximal* si l'anneau quotient A/m est un corps. Dans le cas surjectif, montrez que l'image réciproque d'un idéal maximal de B est un idéal maximal de A (et donner un contre-exemple lorsque f n'est pas surjectif) puis montrez que les bijections de la question (2) induisent des bijections entre les idéaux maximaux de A contenant I et les idéaux maximaux de B.

Exercice 3 - Morphisme de Frobenius
Soient p un nombre premier et A un anneau commutatif de caractéristique p.

(1) Montrez que $px = 0$ pour tout $x \in A$.

(2) Montrez que dans A, les coefficients binomiaux $\binom{p}{i}$ sont nuls pour $0 < i < p$.

(3) Montrez que l'application $F : A \longrightarrow A, x \longmapsto x^p$ est un endomorphisme d'anneaux. Que vaut-il dans le cas où $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

(4) Montrez que F est injectif (resp. bijectif) si K est un corps (resp. un corps fini).

Exercice 4 - Nilradical et anneaux commutatifs réduits
Soit A un anneau commutatif. On appelle *nilradical* et A l'ensemble des éléments nilpotents de A, et on le note $\mathrm{Nil}(A)$ (on trouve aussi la notation $\sqrt{0_A}$ dans la littérature). On dit que A est *réduit* s'il ne possède pas d'élément nilpotent non nul, c'est-à-dire si $\mathrm{Nil}(A) = \{0\}$.

(1) Montrez que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.

(2) Montrez que $A_{\text{réd}} := A/\mathrm{Nil}(A)$ est réduit, et que $\pi : A \to A_{\text{réd}}$ vérifie la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $f : A \to B$ tel que B est un anneau réduit, il existe un unique morphisme $f' : A_{\text{réd}} \to B$ tel que $f = f' \circ \pi$.

(3) Si A est un anneau de caractéristique égale à un nombre premier p, montrez que l'endomorphisme de Frobenius de A est injectif si et seulement si A est réduit.

(4) Montrez que $\mathrm{Nil}(A[X]) = \mathrm{Nil}(A)[X]$.

Exercice 5 - Anneaux finis

(1) Donnez un exemple d'anneau fini non commutatif.

(2) Soient A un anneau fini et $x \in A$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : x est inversible à gauche ; régulier à gauche ; inversible à droite ; régulier à droite.

(3) Montrer qu'un anneau fini intègre est une algèbre à division.

Exercice 6 - Inversible + nilpotent
Soient A un anneau, $u \in A$ un élément inversible et $n \in A$ un élément nilpotent. Montrez que si A est commutatif alors $u + n$ est inversible. Est-ce encore vrai si A n'est pas commutatif ?

Exercice 7 - Matrices et polynômes
Soient R un anneau commutatif et $n \geq 1$ un entier. Donnez un isomorphisme d'anneaux $M_n(R[X]) \to M_n(R)[X]$ entre l'anneau des matrices à coefficients dans l'anneau de polynômes et l'anneau des polynômes à coefficients dans l'anneau de matrices.