

Contrôle 2

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Soit A un anneau commutatif intègre. On appelle *polynôme de Laurent en X à coefficients dans A* un polynôme en X et $1/X$, c'est-à-dire une expression

$$P = \sum_{i=-e}^d a_i X^i$$

où $d, e \geq 0$ sont des entiers. On note $B = A[X, 1/X]$ la A -algèbre des polynômes de Laurent.

- (1) Montrez que tout élément non nul de B peut s'écrire de manière unique sous la forme $X^n P$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $P \in A[X]$ non divisible par X .
- (2) On note A^\times, B^\times les groupes d'éléments inversibles. Montrez que l'application $f : A^\times \times \mathbb{Z} \rightarrow B^\times$ définie par $f(a, n) = aX^n$ est un isomorphisme de groupes.
- (3) Soit \mathbb{C} le corps des nombres complexes. En utilisant deux fois la question (2), décrivez le \mathbb{Z} -module M des éléments inversibles de $\mathbb{C}[X, Y, 1/X, 1/Y]$ et son sous-module de torsion $T(M)$.
- (4) Montrez que le quotient $L := M/T(M)$ est libre de base $\{X, Y\}$ et calculez les facteurs invariants de l'endomorphisme $f : L \rightarrow L$ déterminé par $f(X) = X^5 Y$, $f(Y) = X^{-2} Y^3$.

Contrôle 2

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Soit A un anneau commutatif intègre. On appelle *polynôme de Laurent en X à coefficients dans A* un polynôme en X et $1/X$, c'est-à-dire une expression

$$P = \sum_{i=-e}^d a_i X^i$$

où $d, e \geq 0$ sont des entiers. On note $B = A[X, 1/X]$ la A -algèbre des polynômes de Laurent.

- (1) Montrez que tout élément non nul de B peut s'écrire de manière unique sous la forme $X^n P$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $P \in A[X]$ non divisible par X .
- (2) On note A^\times, B^\times les groupes d'éléments inversibles. Montrez que l'application $f : A^\times \times \mathbb{Z} \rightarrow B^\times$ définie par $f(a, n) = aX^n$ est un isomorphisme de groupes.
- (3) Soit \mathbb{C} le corps des nombres complexes. En utilisant deux fois la question (2), décrivez le \mathbb{Z} -module M des éléments inversibles de $\mathbb{C}[X, Y, 1/X, 1/Y]$ et son sous-module de torsion $T(M)$.
- (4) Montrez que le quotient $L := M/T(M)$ est libre de base $\{X, Y\}$ et calculez les facteurs invariants de l'endomorphisme $f : L \rightarrow L$ déterminé par $f(X) = X^5 Y$, $f(Y) = X^{-2} Y^3$.