Université Rennes 1, Année 2013-2014, Master 1 Math., Algèbre générale de base

Contrôle 1

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1 Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes en X de degré ≤ 2 et $f : E \to E$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par

$$f(P) = 2P - XP'.$$

(1) Donnez la matrice M de f dans la base $\{1, X, X^2\}$.

(2) Soit A la sous-algèbre de $M_3(\mathbb{C})$ engendrée par M. Soit $\mathbb{C}[T]$ l'anneau de polynômes en T. Montrez que l'application $\mathbb{C}$-linéaire $u : \mathbb{C}[T] \to M_3(\mathbb{C})$ qui envoie T sur M induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[T]/(T(T-1)(T-2)) \simeq A$.

(3) L'anneau A est-il intègre ?

Exercice 2 On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des nombres réels de la forme $x = a + b\sqrt{2}$ avec a, b dans $\mathbb{Z}$.

(1) Donnez un isomorphisme $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(2) Donnez un exemple de nombre premier p tel que l'idéal $(p) = p.\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, et un exemple tel que l'idéal (p) n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Université Rennes 1, Année 2013-2014, Master 1 Math., Algèbre générale de base

Contrôle 1

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 3 Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes en X de degré ≤ 2 et $f : E \to E$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par

$$f(P) = 2P - XP'.$$

(1) Donnez la matrice M de f dans la base $\{1, X, X^2\}$.

(2) Soit A la sous-algèbre de $M_3(\mathbb{C})$ engendrée par M. Soit $\mathbb{C}[T]$ l'anneau de polynômes en T. Montrez que l'application $\mathbb{C}$-linéaire $u : \mathbb{C}[T] \to M_3(\mathbb{C})$ qui envoie T sur M induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[T]/(T(T-1)(T-2)) \simeq A$.

(3) L'anneau A est-il intègre ?

Exercice 4 On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des nombres réels de la forme $x = a + b\sqrt{2}$ avec a, b dans $\mathbb{Z}$.

(1) Donnez un isomorphisme $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(2) Donnez un exemple de nombre premier p tel que l'idéal $(p) = p.\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, et un exemple tel que l'idéal (p) n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.