Université Rennes 1 Année 2013–2014
Département de Mathématiques
M1, module ALGB

TP 2

Utilisation de Sage pour le calcul formel

A la fin du TP, il faudra rendre votre copie :
15 min avant la fin du TP enregistrez une dernière fois votre feuille de travail dans un fichier nommé

TP2_votrenom_votreprenom.sagews

et déposez ce fichier dans le cours ALGB de votre ENT sous mes cours en ligne.

Un seul dépôt possible au plus tard 15 min après la fin du TP.
Vous ne pourrez pas déposer un deuxième fichier.

Si vous n'avez pas terminé le TP pendant la séance, vous pourrez le finir en autonomie mais sans dépôt possible.

0. Références.

On rappelle que le livre *Calcul mathématique avec Sage* est accessible à l'adresse[1] :
http://sagebook.gforge.inria.fr/

1. Manipulations sur les matrices.

(1) Construisez la matrice compagnon M du polynôme $P = (u^2 + 1)(u^2 - 2)$.
(2) Utilisez `nrows` et `ncols` pour afficher le nombre de lignes et le nombre de colonnes de M.
(3) Utilisez les commandes `add_mutiple_of_column` et `swap_rows` pour transformer M en une matrice dont le seul coefficient non nul sur la première colonne est celui d'indice $(0, 0)$.
(4) Utilisez la commande `submatrix` pour extraire la sous-matrice de M de taille $(3, 3)$ en bas à droite.
(5) Exécutez les instructions :

```
N=M;
N.swap_row(1,2);
M
```

Que constate-t-on ?

[1] Par ailleurs, on trouve à l'adresse http://www.sagemath.org/pdf/en/reference/matrices/ une documentation Sage spécifique sur les matrices, en anglais. Mais vous ne devriez pas en avoir besoin pour le TP.

2. Algorithme de calcul des facteurs invariants : description.

On se propose d'écrire un programme qui calcule la forme normale de Smith D d'une matrice $M \in \mathsf{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ ainsi que des matrices inversibles P et Q telles que $PMQ = D$.

On utilisera un algorithme légèrement différent de celui présenté dans le cours : on s'autorise à effectuer des échanges de lignes et colonnes (transformations de déterminant -1), on utilise la division euclidienne pour éviter le recours aux couples de Bézout, et on s'efforce de placer dès le début le pgcd des coefficients de la matrice en position $(0,0)$. Voici une description générale de l'algorithme :

(1) si la matrice est nulle, on ne fait rien ; sinon, on place en position $(0,0)$ un coefficient non nul ;
(2) tant qu'existent dans la matrice des coefficients a qui ne sont pas multiples du coefficient b d'incide $(0,0)$, on fait la division euclidienne $a = bq + r$ et on fait remonter r en position $(0,0)$;
(3) à la fin de l'étape précédente, le coefficient d'indice $(0,0)$ est le pgcd des coefficients de la matrice ; on annule tous les coefficients de la première ligne et de la première colonne ;
(4) on applique le programme récursivement à la sous-matrice de format $(n-1, p-1)$ en bas à droite.

3. Algorithme de calcul des facteurs invariants : écriture.

En début d'algorithme, on pose $D = M$, $P = \mathsf{I}_n$, $Q = \mathsf{I}_p$. L'objet sur lequel porte l'algorithme est le triplet (D, P, Q) ; à chaque étape , les opérations effectuées doivent être répercutées sur les 3 matrices.

Dans chaque procédure, on veillera à choisir si les arguments d'entrée et de sortie doivent être D, ou (D, P, Q), ou une partie de ces données (ou autre chose).

(1) Écrire une procédure `coef_non_nul_en_tete` qui prend une matrice non nulle et renvoie une matrice équivalente ayant un coefficient non nul en $(0,0)$.
(2) Écrire une procédure `position_premier_coef_non_multiple` utilisant une boucle `while` qui prend une matrice ayant un coefficient non nul en $(0,0)$ et renvoie un couple d'entiers (i,j) tel que :
   i) (i,j) est le plus petit (pour l'ordre lexicographique[2]) des couples tel que le coefficient d'indice (i,j) n'est pas multiple de celui d'indice $(0,0)$, s'il en existe ;
   ii) $i = n$, sinon.
(3) Écrivez une procédure `pgcd_en_tete` qui prend une matrice ayant un coefficient non nul en $(0,0)$ et renvoie une matrice équivalente dont les coefficients ont un pgcd placé en $(0,0)$.
(4) Écrivez des procédures `annule_premiere_ligne` et `annule_premiere_colonne` qui prennent une matrice dont les coefficients ont un pgcd placé en $(0,0)$ et annule ses premières ligne et colonne.
(5) Écrivez une procédure `sur_matrices` qui prend en argument un quadruplet `(D1,P1,Q1,a)` formé de matrices de dimensions $n-1$ et $p-1$ et d'un coefficient a, et qui renvoie les matrices diagonales par blocs `(a,D1)`, `(1,P1)`, `(1,Q1)` de dimensions n, p.

[2] L'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$ est défini ainsi : $(i,j) \leqslant (i',j')$ si et seulement si $i \leqslant i'$ ou ($i = i'$ et $j \leqslant j'$).

(6) Écrivez une procédure récursive `FI` qui prend en argument `(D,P,Q)` et renvoie le triplet formé de la forme de Smith et des deux matrices qui comptabilisent les opérations lignes-colonnes.

(7) Écrivez une procédure `facteurs_invariants` qui prend en argument une matrice M et renvoie le triplet formé de la forme de Smith et des deux matrices qui comptabilisent les opérations lignes-colonnes.

(8) Testez votre programme sur la matrice M de la partie 1.

4. Applications.

(1) Pour tout $n \geqslant 6$, calculez la forme normale de Smith de la matrice de format (n, n) dont les coefficients sont les entiers de 0 à $n^2 - 1$. Que constate-t-on ?

(2) Calculez une base adaptée au sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^3$ engendré par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$