Université Rennes 1, Année 2012-2013
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 6

Cette feuille rassemble quelques exercices qui complètent ou éclairent ceux de la feuille 5.

Exercice 1 - Bases adaptées, bis
(1) Donner une base de $\mathbb{Z}^2$ adaptée au sous-module $N = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a+b \text{ est pair}\}$.
(2) Même question avec $\mathbb{Z}^3$ et le sous-module engendré par les vecteurs $v_1 = (2,6,-8)$ et $v_2 = (-4,4,-12)$.

Exercice 2 - Invariants de militude *vs.* facteurs invariants
À un polynôme $P = X^n + \sum a_i X^i \in k[X]$, avec $n \geqslant 1$, on associe sa matrice compagnon

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que la forme réduite de Smith de la matrice $XI_n - \mathcal{C}_P$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} P & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(2) En déduire les deux assertions suivantes :

(i) les invariants de similitude d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(k)$ sont les facteurs invariants non constants de la matrice $XI_n - A$.

(ii) deux matrices A et $B \in \mathrm{M}_n(k)$ sont semblables si et seulement si les matrices $XI_n - A$ et $XI_n - B$ sont équivalentes.

Remarque : $k[X]$ étant un anneau euclidien pour lequel l'algorithme de réduction sous forme de Smith d'une matrice est effectif, on obtient donc, via l'assertion (2.i) un algorithme pour le calcul des invariants de similitude d'une matrice à coefficients dans un corps.

Exercice 3 - Nombre d'invariants de similitude
Lorsque k est un corps algébriquement clos, montrer que le nombre d'invariants de similitude d'un endomorphisme u d'un k-espace vectoriel de dimension finie est égal au maximum des dimensions des sous-espaces propres de u.

Exercice 4 - Théorème de Weyr
Lorsque k est un corps algébriquement clos, montrer que deux endomorphismes u et v d'un k-espace vectoriel de dimension finie sont semblables si et seulement si

$$\mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n = \mathrm{rg}(v - \lambda \mathrm{Id}_E)^n$$

pour tous $\lambda \in k$ et $n \in \mathbb{N}_\star$.