Université Rennes 1, Année 2012-2013
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 - Mise sous forme normale de Smith
(1) Trouver une matrice diagonale de Smith D qui soit S-équivalente à la matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}.$$

(2) Trouver une matrice diagonale de Smith D et deux matrices P et Q de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ telles que $D = PBQ$, avec:

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 - Indice et déterminant
Soient M un groupe abélien libre de rang n et f un endomorphisme de M. Montrer que le sous-groupe $f(M)$ est d'indice fini si, et seulement si, f est injectif, et que dans ce cas l'indice est égal à $|\det(f)|$. (On rappelle que l'indice d'un sous-groupe est le cardinal du quotient du groupe par ce sous-groupe.)

Exercice 3 - Bases adaptées
(1) Donner une base de $\mathbb{Z}^2$ adaptée au sous-module engendré par les vecteurs $(3, -6)$ et $(4, 2)$.
(2) Même question avec $\mathbb{Z}^3$ et le sous-module engendré par $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$.

Exercice 4 - Composantes primaires des modules de torsion
Soit A un anneau principal. Soit M un A-module de torsion, c'est-à-dire tel que pour tout $x \in M$, il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $ax = 0$. Pour tout irréductible $p \in A$, on appelle *composante p-primaire de M* le sous-module $M(p^\infty) = \{x \in M, \exists n \geq 1, p^n x = 0\}$.

(1) Soit Σ un ensemble de représentants des irréductibles de A. Montrez qu'on a la *décomposition en composantes primaires* $M = \bigoplus_{p\in\Sigma} M(p^\infty)$ [1].

(2) Montrez que si M est de type fini, on a :

(i) pour tout p sauf un nombre fini, $M(p^\infty) = 0$;

(ii) pour tout p, il existe $n \geq 0$ tel que $M(p^\infty) = M(p^n)$.

(3) Donnez des contre-exemples pour (i) et (ii) lorsque M n'est pas supposé de type fini.

[1] Soit $\{M_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-modules. On écrit $M = \oplus_{i\in I} M_i$, et on dit que M est *somme directe des* M_i, si M est engendré par les M_i et si pour toute somme finie nulle $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} = 0$ avec $x_{i_j} \in M_{i_j}$, on a $x_{i_1} = \cdots = x_{i_n} = 0$. Ceci revient à dire que le morphisme $f : \oplus_{i\in I} M_i \to M$ donné par la famille d'inclusions $f_i : M_i \to M$ est un isomorphisme.

Exercice 5 - Nombre de facteurs invariants
Soient A un anneau principal et M un A-module de type fini. Montrez que le nombre de facteurs invariants de M est égal au cardinal minimum d'une famille de générateurs de M. (Indication : en vous inspirant de la démonstration du théorème de structure, montrez que si M possède une famille de générateurs à m éléments, alors $m \geq n$.)

Exercice 6 - Calcul pratique des facteurs invariants
Soit A un anneau principal. On abrège « nombre de facteurs invariants » en NFI.

(1) Soit $M = A/(d_1) \times \cdots \times A/(d_n)$ où $d_i \in A$, $d_i \neq 0$, $d_i \notin A^\times$, et $d_1 \mid \cdots \mid d_n$. Montrez qu'il existe un ensemble fini Σ d'irréductibles de A tel que $d_i \sim \prod_{p\in\Sigma} p^{\alpha_p(i)}$ avec :

α_p croissante, pour tout $p \in \Sigma$; $\quad \alpha_p(1) \neq 0$ pour au moins un p ; $\quad \alpha_p(n) \neq 0$ pour tout p.

(2) Donnez une expression pour le NFI de la composante p-primaire $M(p^\infty)$.

(3) Écrivez la décomposition en composantes primaires $M = \oplus_{p\in\Sigma} M(p^\infty)$ ordonnées par NFI décroissant, et expliquez comment se décompose d_1 dans cette somme directe.

(4) Soit $M = C_1 \times \cdots \times C_m$ un module produit de groupes cycliques, i.e. de la forme $C \simeq A/(a)$ avec $a \in A$ non nul et non inversible. Expliquez comme calculer les facteurs invariants de M et appliquez la méthode au groupe abélien $M = \mathbb{Z}/490\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/147\mathbb{Z}$.

Exercice 7 - Inversibles d'un anneau fini
Décomposez le nombre $n = 15125$ en facteurs premiers puis calculez les facteurs invariants du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 8 - Similitude dans $\mathrm{M}_n(k)$ et équivalence dans $\mathrm{M}_n(k[X])$
Soient k un corps et $n \geq 1$ un entier. On rappelle que deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ sont *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $B = P^{-1}AP$, et *équivalentes* s'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(k)$ telles que $B = PAQ$. Le but de cet exercice est de démontrer que A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(k)$ si et seulement si $XI - A$ et $XI - B$ sont équivalentes dans $\mathrm{M}_n(k[X])$; ainsi, pour calculer les invariants de similitude qui apparaissent dans la décomposition de Frobenius d'une matrice A, on applique l'algorithme de mise sous forme normale de Smith à la matrice $XI - A$.

(1) Montrez que si A et B sont semblables, alors $XI - A$ et $XI - B$ sont équivalentes.

On suppose que $XI - A$ et $XI - B$ sont équivalentes. On choisit $P = P(X)$ et $Q = Q(X)$ dans $\mathrm{GL}_n(k[X])$ telles que $XI - B = P(XI - A)Q$. On pose $R = Q^{-1}$ et on considère les divisions euclidiennes, l'une à gauche l'autre à droite :

$$\begin{aligned} P &= (XI - B)P_1 + P_0 \quad \text{avec } P_0 \in \mathrm{M}_n(k), \\ R &= R_1(XI - A) + R_0 \quad \text{avec } R_0 \in \mathrm{M}_n(k). \end{aligned}$$

(2) Montrez que $(XI - B)(P_1 - R_1)(XI - A) = (XI - B)R_0 - P_0(XI - A)$ et déduisez-en que les deux membres de cette égalité sont nuls.

(3) Montrez que $R_0 = P_0$ et $BP_0 = P_0A$.

On considère la division euclidienne à droite $Q = Q_1(XI - B) + Q_0$ avec $Q_0 \in \mathrm{M}_n(k)$.

(4) En calculant le produit $Q^{-1}Q$, montrez que $I = (R_1P^{-1}+R_0Q_1)(XI-B)+R_0Q_0$. Déduisez-en que Q_0 est inversible puis que A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(k)$.

Exercice 9 (1) Déterminer toutes les classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ de polynôme caractéristique $(X^2-1)(X-1)^3$. (On donnera un élément par classe.)
(2) Déterminer toutes les classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ de polynôme minimal $(X-2)^3$. (On donnera un élément par classe.)

Exercice 10 Donner la liste des invariants de similitude, ainsi que le polynôme minimal, des matrices de $\mathrm{M}_6(\mathbb{Q})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 & 13 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 Déterminer le nombre de classes de similitude d'endomorphismes de K^8 de polynôme caractéristique $(X^2+1)^2(X^2-3)^2$, lorsque $K = \mathbb{Q}$, lorsque $K = \mathbb{R}$ et lorsque $K = \mathbb{C}$.

Exercice 12 - Matrices semblables
Pour chacune des deux matrices complexes suivantes, déterminer si elle est semblable à une matrice à coefficients réels:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 - Similitude en petite dimension
Soient K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension $d \geq 1$.

(1) On suppose que $d \leqslant 2$. Montrer que deux endomorphismes de V sont semblables si et seulement s'ils ont même polynôme minimal.

(2) On suppose que $d = 3$. Montrer que deux endomorphismes de V sont semblables si et seulement s'ils ont mêmes polynômes minimal et caractéristique.

(3) Le résultat de la question précédente est-il vrai lorsque $d \geqslant 4$?

Exercice 14 - Commutant
Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de V. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) l'espace V est cyclique pour f;

(2) tout endomorphisme de V commutant avec f est un polynôme en f.