Université Rennes 1, Année 2012-2013
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, dire si la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E est compatible avec la ou les opérations indiquées :

(1) $E = \mathbb{R}$, $\mathscr{R} = \{(x, y),\ |x| = |y|\}$; addition, multiplication.

(2) $E = \mathbb{Z}$, $\mathscr{R} = \{(x, y),\ x = y = 0 \text{ ou } xy > 0\}$; addition, multiplication.

(3) $E = \mathbb{Z}$, $\mathscr{R} = \{(x, y),\ x \text{ et } y \text{ sont de même parité}\}$; addition, multiplication.

(4) $E = \mathbb{R}$, $\mathscr{R} = \{(x, y),\ x - y \in \mathbb{Z}\}$; addition, multiplication.

(5) $E = \mathbb{N}^*$, $\mathscr{R} = \{(x, y),\ x \text{ et } y \text{ sont de même parité}\}$; puissance.

Exercice 2 Soit E un ensemble. Les lois suivantes munissent-elles l'ensemble des parties $\mathscr{P}(E)$ d'une structure de groupe : l'intersection ; la réunion ; la différence symétrique Δ définie par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

Exercice 3 Soient G un groupe, E un ensemble, $f : E \to G$ une bijection. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe sur E telle que f soit un isomorphisme. Expliciter cette loi lorsque $E = \mathbb{Z}$, $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $f(x) = x + 1$.

Exercice 4 - Ordre d'un élément
Soit G un groupe et $g \in G$. On appelle *ordre de g dans G* le plus petit des entiers $n \geq 1$ tels que $g^n = 1$, s'il en existe un, et $+\infty$ sinon.

(1) Quel est l'ordre de -1 dans $(\mathbb{Q}, +)$? Et dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$?

(2) L'élément $g \in G$ étant fixé, montrez que l'application $\mathbb{Z} \to G$, $m \mapsto g^m$ est un morphisme de groupes. Donnez les liens entre son noyau, son image et l'ordre de g.

(3) Soient $k, n \geq 1$ deux entiers. Calculez l'ordre de la classe $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par le cas où k et n sont premiers entre eux).

Exercice 5 - Caractérisations de la commutativité

(1) Soit G un groupe. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : G est commutatif ; l'inversion $g \mapsto g^{-1}$ est un morphisme de groupes ; l'élévation au carré $g \mapsto g^2$ est un morphisme de groupes.

(2) (Plus difficile) Les groupes tels que l'élévation au cube $g \mapsto g^3$ est un morphisme de groupes sont-ils tous commutatifs ?

Exercice 6 - Automorphismes intérieurs
Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on note $c_g : G \to G$ l'application $x \mapsto gxg^{-1}$.

(1) Montrez que c_g est un automorphisme du groupe G.

(2) Montrez que $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

(3) Montrez que l'image de c est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$. Le morphisme c est-il toujours surjectif ?

Exercice 7 - Groupes sans automorphisme

Soit G un groupe dont le seul automorphisme est l'identité.

(1) Montrez que G est commutatif.

(2) Montrez que G peut être muni canoniquement d'une structure d'espace vectoriel sur le corps à 2 éléments $\mathbb{F}_2$.

(3) Montrez que $G \simeq \{1\}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 8 - Exposant d'un groupe

Soit G un groupe abélien fini. Pour tout $x \in G$, on note $\omega(x)$ l'ordre de x.

(1) Soit $(x, y) \in G^2$, $m = \omega(x)$ et $n = \omega(y)$.

(i) Lorsque m et n sont premiers entre eux, montrer que $\omega(xy) = mn$.

(ii) Si on ne suppose plus m premier avec n, a-t-on $\omega(xy) = \mathrm{ppcm}(m, n)$?

(2) Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}_\star)^2$, montrer qu'il existe $(m', n') \in (\mathbb{N}_\star)^2$ tel que

$$m' | \ m, \quad n' | n, \quad \mathrm{pgcd}(m', n') = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{ppcm}(m, n) = m'n'$$

(3) On définit l'*exposant* d'un groupe fini G, noté $\exp G$, comme le ppcm des ordres de ses éléments. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que $\exp G = \omega(z)$.

(4) En déduire qu'un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

Exercice 9 - Groupe dérivé

Soit G un groupe. Pour $x, y \in G$, on note $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ le *commutateur* de x et y. On appelle *groupe dérivé* de G le sous-groupe $D(G)$ de G engendré par les commutateurs.

(1) Caractériser les couples d'éléments (x, y) de G tels que $[x, y] = e$. Déterminer $D(G)$ lorsque G est abélien.

(2) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G (i.e. stable par les automorphismes de G) ou, directement, qu'il est distingué dans G et que le quotient $G/D(G)$ est abélien.

(3) Montrer que, pour un sous-groupe $H \lhd G$, le quotient G/H est abélien si et seulement si $D(G) \subset H$.

(4) Propriété universelle : montrer que, pour tout groupe abélien M et tout morphisme de groupes $f : G \longrightarrow M$, il existe une unique factorisation de f à travers $G/D(G)$.

(5) Déterminer $D(\mathfrak{S}_\mathfrak{n})$. Indication : les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 10 - Morphismes et commutativité
Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

(1) On suppose H commutatif. Montrez que si f est injectif, alors G est commutatif. Si f n'est pas injectif, donnez un contre-exemple.

(2) On suppose G commutatif. Montrez que si f est surjectif, alors H est commutatif. Si f n'est pas surjectif, donnez un contre-exemple.

(3) On note $Z_G = \{g \in G; \forall x \in G, xg = gx\}$ le centre de G et Z_H celui de H. Montrez que si f est surjectif, on a $f(Z_G) \subset Z_H$. Si f n'est pas surjectif, donnez un contre-exemple.

Exercice 11 - Produit semi-direct
Soit N un sous-groupe distingué de G et $\pi\colon G \to G/N$ le morphisme de quotient. On appelle *section* de π un morphisme de groupes $s\colon G/N \to G$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}$.

(1) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un sous-groupe $H \subset G$ tel que $H \cap N = 1$ et $HN = G$;

(ii) Le morphisme π admet une section.

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que G est *produit semi-direct de N par H*. On suppose dans la suite que c'est le cas.

(2) Montrez que H est isomorphe à G/N. Montrez que $G \xrightarrow{\sim} N \times H$ ensemblistement.

(3) Notons $\theta\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ l'action de H sur N par conjugaison. Montrez qu'on peut reconstruire la structure de groupe de G (c'est-à-dire, sa multiplication) à partir de N, H et θ.

(4) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H commute avec N dans G ;

(ii) H est distingué ;

(iii) θ est le morphisme trivial ;

(iv) la structure de produit semi-direct définie par θ est une structure de produit direct.

Exercice 12 - Un théorème de Frobenius pour les sous-groupes distingués

(1) Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 est toujours distingué.

(2) On se propose maintenant de démontrer un théorème de Frobenius, qui est une généralisation du critère précédent :
“ Si H est un sous-groupe d'indice p de G, où p est le plus petit diviseur premier de l'ordre de G, alors H est distingué dans G. ”

(i) Justifier l'existence d'un morphisme $\rho : G \longrightarrow \mathfrak{S}_{G/H}$. On note K son noyau.

(ii) Montrer que $\mathrm{Card}\, G \mid p!\, \mathrm{Card}\, K$.

(iii) Conclure, en remarquant que $K \subset H$.

Exercice 13 Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.