Université Rennes 1, Année 2012-2013
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Correction de l'exercice 9 de la feuille de td 2

Énoncé

Soit A un anneau tel que $a^3 = a$, pour tout $a \in A$. On se propose d'établir que A est commutatif.

(1) Montrer que $6A = \{0\}$.

(2) Montrer que $2A$ et $3A$ sont des idéaux bilatères de A vérifiant $2A+3A = A$ et $2A \cap 3A = \{0\}$. En déduire qu'on peut supposer soit $2A = \{0\}$, soit $3A = \{0\}$.

(3) Si $2A = \{0\}$, montrer que $a^2 = a$, pour tout $a \in A$, et conclure.

(4) Si $3A = \{0\}$, conclure en s'intéressant à $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.

Correction

(1) Pour $a \in A$, $2a = (2a)^3 = 8a^3 = 8a$, soit $6a = 0$ (*i.e.* la caractéristique de A divise 6).

(2) 2 et 3 étant des éléments centraux de A (*i.e.* commutant avec n'importe quel élément de A pour la multiplication), $2A$ et $3A$ sont des idéaux bilatères de A.

Pour $a \in A$, de $6a = 0$, on déduit $a = -5a = 2(-a)+3(-a)$, ce qui établit que $A = 2A+3A$.

Si $a \in 2A \cap 3A$, alors il existe $b, c \in A$ tels que $a = 2b = 3c$. Ainsi $2a = 6c = 0$ et $3a = 6b = 0$, d'où $a = 3a - 2a = 0$.

Ayant $2A + 3A = A$ (*i.e.* les idéaux $2A$ et $3A$ sont étrangers) et $2A \cap 3A = \{0\}$, d'après le théorème chinois et la question (1), $A \simeq A/6A \simeq A/2A \times A/3A$. Ainsi, la commutativité de A résultera de la commutativité de A/pA, avec $p \in \{2,3\}$, A/pA étant un anneau de caractéristique p, *i.e.* pour lequel $pA = \{0\}$.

(3) Si $2A = \{0\}$, *i.e.* si A est de caractéristique 2, alors, pour $a \in A$,

$$a+1 = (a+1)^3 = (a+1)^2(a+1) = (a^2+1)(a+1) = a^3+a^2+a+1 = a^2+1$$

soit $a^2 = a$. Alors, pour $a, b \in A$,

$$a+b = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a+ab+ba+b$$

Ainsi, $ab = -ba = ba$, pour tout $a, b \in A$.

(3) Si $3A = \{0\}$, *i.e.* si A est de caractéristique 3, alors, pour $a, b \in A$,

$$a+b = (a+b)^3 = a^3+a^2b+aba+ab^2+ba^2+bab+b^2a+b^3$$

$$a-b = (a-b)^3 = a^3-a^2b-aba+ab^2-ba^2+bab+b^2a-b^3$$

soit

$$a^2b+aba+ab^2+ba^2+bab+b^2a = 0 = -a^2b-aba+ab^2-ba^2+bab+b^2a$$

La différence de ces deux égalités donne $2a^2b + 2aba + 2ba^2 = 0$, soit $a^2b + aba + ba^2 = 0$, car car$A = 3$. En multipliant respectivement par a à gauche et à droite cette dernière égalité, on obtient :

$$ab + a^2ba + aba^2 = 0 = a^2ba + aba^2 + ba,$$

soit, en soustrayant, $ab - ba = 0$.