Université Rennes 1, Année 2012-2013
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Correction de l'exercice 5 de la feuille de td 4

Correction

(1) Si M est un A-module de type fini, il existe $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in M^n$, une famille génératrice de M, et $f : A^n \longrightarrow M, (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est surjective. Alors, par le premier théorème d'isomorphisme, $M \simeq A^n/\ker f$.

Réciproquement, s'il existe un entier naturel n et un N sous-module de A^n donnant lieu à un isomorphisme $f : A^n/N \xrightarrow{\sim} M$, alors, notant $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de A^n et $\pi : A \longrightarrow A/N$ la projection canonique, $(f(\pi(e_i)))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice finie de M.

(2) Soit M un A-module de type fini. Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in M^n$ est une famille génératrice finie de M, alors, pour tout sous-module N de M, notant π la projection canonique, $(\pi(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice du quotient M/N.

(3) Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in M^n$ une famille génératrice finie du A-module de type fini M et $(y_j)_{j\in J} \in M^J$ une famille génératrice quelconque de M. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, il existe donc une partie finie $J_i \subset J$ et une famille $(a_j)_{j\in J_i} \in A^{\operatorname{Card} J_i}$ telles que $x_i = \sum_{j\in J_i} a_j y_j$. Alors $J_0 = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} J_i$ est un sous-ensemble fini de J et, puisque $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de M, $(y_j)_{j\in J_0}$ est une famille génératrice de M extraite de $(y_j)_{j\in J}$.

(4) Soit $(u^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})^n$ une famille finie d'éléments de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, posons $n_i = \max\{k \in \mathbb{N} \ / \ u_k^{(i)} \neq 0\}$ et $n_0 = \max\{n_i \ / \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Considérons alors la suite u dont le seul terme non nul, égal à 1, est celui d'indice $n_0 + 1$. Alors, clairement, $u \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, mais u n'appartient pas à l'idéal engendré par la famille $(u^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Ainsi, $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas un idéal de type fini. En particulier, l'anneau $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas noethérien.

(5) On utilise le résultat de la question précédente : $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$-module libre de rang 1 dont le sous-module $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas de type fini.

(6) Soit M un A-module libre et $(x_i)_{i\in I}$ une base de M. Si M est de type fini, alors, d'après la question (3), il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $(x_i)_{i\in J}$ soit une famille génératrice de M. De plus, en tant que sous-famille d'une famille libre, $(x_i)_{i\in J}$ reste également une famille libre et est donc une base de M. Ainsi M est isomorphe à $A^{\operatorname{Card} J}$. La réciproque est claire ou découle de la question (1).

(7) Idem question (2) de l'exercice 4.