Université Rennes 1, Année 2012-2013
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Correction de l'exercice 12 de la feuille de td 2

Énoncé

Soit A un anneau commutatif.

(1) Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A et $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux de A. Montrer que si $\mathfrak{P}$ contient le produit $I_1 \ldots I_n$, alors il contient l'un des I_k.

(2) Montrer que si I est un idéal non premier et distinct de A, il existe des idéaux I_1 et I_2 de A distincts de I tels que $I \subset I_1, I \subset I_2$ et $I_1 I_2 \subset I$.

Correction

Rappelons qu'un idéal $\mathfrak{P}$ d'un anneau A est premier si et seulement si $\mathfrak{P} \neq A$ et, pour tout $a, b \in A$, $ab \in \mathfrak{P}$ implique que $a \in \mathfrak{P}$ ou $b \in \mathfrak{P}$ (ce qui ne fait que traduire la nature intègre du quotient $A/\mathfrak{P}$).

(1) Raisonnons par contraposition. On suppose donc que, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $I_j \nsubseteq \mathfrak{P}$. Il existe alors $a_j \in I_j \setminus \mathfrak{P}$, pour $j \in [\![1, n]\!]$, et, d'après le rappel liminaire, $a_1 \ldots a_n \in \mathfrak{P}$ est exclu. Ainsi $I_1 \ldots I_n \nsubseteq \mathfrak{P}$.

(2) I étant non premier et distinct de A, il existe $a_1, a_2 \in A \setminus I$ tels que $a_1 a_2 \in I$. Alors $I_j = I + a_j A$, $j \in \{1, 2\}$, conviennent.