Corrigé du TD 7

Exercice 1 Appliquons d'abord la formule qui donne le volume d'une pyramide ou même d'un cône plus général : aire de la base $\times$ hauteur, divisé par 3. On trouve $V = a^3/6$. On peut retrouver ce résultat ainsi : on considère un cube de côté a, donc de volume a^3. Si on trace toutes ses diagonales on voit qu'on le découpe en exactement 6 pyramides (une par face) qui sont isométriques à la pyramide de l'exercice. Donc le volume d'une pyramide est le sixième du volume du cube, soit encore $a^3/6$.

Exercice 2 En découpant le cube comme indiqué, on obtient 3 pyramides que l'on peut qualifier de "rectangles" au sens où le sommet est situé sur la droite orthogonale à la base et passant par un sommet. (Ainsi les faces triangulaires de la pyramide sont des triangles rectangles.) Les faces de la pyramide sont :

- la face carrée de côté a,
- deux faces triangles rectangles isocèles de côtés a, a et $a\sqrt{2}$,
- deux faces triangles rectangles non isocèles de côtés a, $a\sqrt{2}$ et $a\sqrt{3}$ (le côté $a\sqrt{3}$ est une diagonale "intérieure" du cube).

Le volume de chacune des trois pyramides ("base $\times$ hauteur divisé par 3") est $a^3/3$. On retrouve cela en disant que le volume du cube est a^3 et que le volume de chaque pyramide en vaut un tiers.

Exercice 3 Le volume du cornet est donné par "aire de la base $\times$ hauteur, divisé par 3" et celui de la demi-boule est donné par $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$. On trouve $\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2(h + 2r)$.

Exercice 4 Il y a sans doute beaucoup de façons de faire. Je vous propose de considérer le plan horizontal qui coupe le cube en deux moitiés égales, on constate qu'il découpe le polyèdre qui nous intéresse en deux pyramides symétriques l'une de l'autre. Les bases de ces pyramides sont carrées de côté $a\frac{\sqrt{2}}{2}$, et la hauteur est $a/2$. Donc le volume de chaque pyramide est

$$\frac{1}{3} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \text{le volume du polyèdre est donc } a^3/6.$$

Exercice 4 a) les conditions sont que $A''B = A'''B$, $A'''C = A'C$ et $A'D = A''D$.
b) On obtient un quadrilatère si... ?
c) Soit $EFGH$ un carré de côté $2a$, on souhaite placer deux points I sur le côté $[FG]$ et J sur le côté $[HG]$, tels que lorsqu'on replie on obtienne un tétraèdre. On sait qu'on doit avoir $FI = IG$ et $HJ = JG$ donc I doit étre le milieu de $[FG]$ et J le milieu de $[HG]$. On obtient ainsi le seul patron possible. Soit O le sommet obtenu après pliage, en collant F, G et H. Soit H le pied de la hauteur du tétraèdre issue de O et K le milieu de $[IJ]$.

Pour calculer le volume du tétraèdre on prend le triangle EIJ pour base et on calcule la hauteur OH. Pour calculer l'aire de EIJ on retranche trois petits triangles au carré $EFGH$ d'aire $4a^2$. On trouve $\mathcal{A}(EIJ) = 3a^2/2$. Maintenant faisons un dessin dans le plan médiateur de $[IJ]$, c-à-d le plan (OEH), qui coupe le tétraèdre en une section triangulaire dont on peut calculer les côtés par Pythagore. On trouve que c'est un triangle rectangle de côtés $2a$, $a\sqrt{2}/2$ et $3a\sqrt{2}/2$. La hauteur OH dessine dans ce triangle deux petits triangles rectangles. Soit $\alpha = \widehat{OEH} = \widehat{HOK}$. En calculant $\cos(\alpha)$ de deux manières différentes on trouve $OH = 2a/3$. On en déduit le volume du tétraèdre :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3a^2}{2} \times \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Remarque : dans le TD 6 on a vu la *formule de Héron* qui permet de calculer l'aire d'un triangle en fonction seulement des longueurs des côtés a, b, c. En dimension 3 il existe une généralisation de cette formule, appelée *formule du déterminant de Cayley-Menger*, qui permet de calculer le volume d'un tétraèdre en fonction des longueurs des côtés a, b, c, d, e, f. Mais bien sûr elle n'est pas aussi simple que la formule de Héron !