Corrigé du TD 6

Exercice 1 1) $a^2 = \| \overrightarrow{BC} \|^2 = \| \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \|^2 = \| \overrightarrow{BC} \|^2 + \| \overrightarrow{BC} \|^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$
2) a) C'est un résultat du cours que $S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A})$. On le retrouve en appelant H le pied de la hauteur issue de B et en exprimant la définition du sinus dans le triangle ABH.
2) b) Pour utiliser facilement les résultats de 1) et 2)a) on va écrire que $(2bc\cos(\widehat{A}))^2 + (2bc\sin(\widehat{A}))^2 = (2bc)^2$. On trouve :

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 + (4S)^2 = (2bc)^2$$

Il s'agit d'en déduire, comme le demande l'énoncé, que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Comme $p - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $p - b = \frac{1}{2}(a + c - b)$ et $p - c = \frac{1}{2}(a + b - c)$, on voit deux façons d'aboutir au résultat : soit on développe $p(p-a)(p-b)(p-c)$ et on vérifie qu'on arrive bien à l'égalité ci-dessus, soit on part de l'égalité ci-dessus et on arrive à la factorisation $p(p-a)(p-b)(p-c)$. La première méthode mène à des calculs très lourds comme vous vous en doutez, mais pour la seconde solution on voit tout de suite que l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ permet d'aller très vite :

$$\begin{aligned}(4S)^2 &= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 - 2bc + a^2)\\ &= ((b+c)^2 - a^2)(-(b-c)^2 + a^2) = (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)\\ &= 2p.2(p-a).2(p-c).2(p-b)\end{aligned}$$

On en déduit la formule demandée.

Exercice 2 1) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
3) $\mathcal{A} = \int_0^1 f(t)\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

Exercice 3 Par raison de symétrie, le centre du cercle cherché est sur la perpendiculaire à AB passant par O. Soit r son rayon, F son centre, et $R = OA$. En écrivant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle FOI on a $(R/2 + r)^2 = (R/2)^2 + (R - r)^2$. On en déduit que $r = R/3$. Ainsi l'aire du disque délimité par G est $\pi(R/3)^2 = \pi R^2/9$. Cela fait $2/9$ de l'aire du demi-disque délimité par C.

Exercice 4 Suivons les indications données. Comme J est le milieu de $[BC]$ et M le milieu de $[BD]$, le triangle BJM est l'image de BCD par l'homothétie de centre B et de rapport $1/2$. Comme une homothétie de rapport λ multiplie les aires par λ^2 on trouve $\mathcal{A}(MJB) = \mathcal{A}(BDC)/4$.

Par un raisonnement similaire on voit que $\mathcal{A}(MIB) = \mathcal{A}(BAD)/4$. En additionnant ces deux calculs d'aires on trouve $\mathcal{A}(IMJB) = \mathcal{A}(ABCD)/4$.

Pour montrer que MIJ et PIJ ont même aire on commece par constater que (IJ) est parallèle à MP. En effet, I étant le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$, par Thalès la droite (IJ) est parallèle à (AC). De plus, (AC) est parallèle à (MP) par construction. Alors, c'est un résultat du cours que lorsqu'on fait varier un sommet (ici M devient P) sur une droite parallèle au côté $[IJ]$, l'aire ne change pas. Ceci est d'ailleurs immédiat puisque la hauteur issue de P a même longueur que la hauteur issue de M. Donc, $\mathcal{A}(MIJ) = \mathcal{A}(PIJ)$.

En conclusion $\mathcal{A}(IPJB) = \mathcal{A}(BIJ) + \mathcal{A}(IJP) = \mathcal{A}(BIJ) + \mathcal{A}(IJM) = \mathcal{A}(IMJB) = \mathcal{A}(ABCD)/4$. On montre par un raisonnement analogue que les trois autres domaines dessinés dans $ABCD$ partant de P ont pour aire $\mathcal{A}(ABCD)/4$.