Corrigé du TD 5

Exercice 1 Soient d et D les longueurs des diagonales, alors l'aire est $dD/2$.

Exercice 2 Notons r le rayon recherché. L'aire du triangle OBC est $\frac{1}{2} \cdot r \cdot BC$. De même les aires de OAC et OAB sont $\frac{1}{2} \cdot r \cdot AC$ et $\frac{1}{2} \cdot r \cdot AB$ respectivement. Donc

$$Aire(ABC) = Aire(OBC) + Aire(OAC) + Aire(OAB) = \frac{1}{2} \cdot r(BC + AC + AB) = \frac{rp}{2}$$

où p est le périmètre de ABC. On en déduit que $r = 2A/p$.

Exercice 3 Pour faire le dessin « à la règle et au compas » c'est-à-dire sans rapporteur, la difficulté est de construire un angle de $\pi/3$ radians (60 degrés). Traçons un repère centré au centre du cercle. On utilise le fait que $\cos(\pi/3) = 1/2$: on trace la droite d'équation $x = 1/2$, parallèle à l'axe des y. Elle coupe le cercle dans les y positifs en un point P tel que $[OP)$ et l'axe des x définissent un angle de mesure $\pi/3$. Si on réitère cette construction on peut tracer l'hexagone entier.

Notons A le point de coordonnées $(1, 0)$. Pour calculer l'aire de l'hexagone on multiplie par 6 l'aire du triangle OAP. Or comme le sinus de $\pi/3$ vaut $\sqrt{3}/2$ on trouve

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 4 Soit a la longueur du côté de H. Comme H et T ont même périmètre $p = 6a$, le côté de T a pour longueur $2a$. D'après l'exercice précédent les aires de T et H valent

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2a)^2 \quad \text{et} \quad A_H = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times a^2$$

On en déduit que $A_H = \frac{3}{2} A_T$. Pour retrouver cela géométriquement on observe qu'on peut découper T en 4 triangles équilatéraux et H en 6 triangles équilatéraux, tous de même taille. Soit B l'aire de ce petit triangle équilatéral de base, on a donc $A_T = 4B$ et $A_H = 6B$ donc $A_H = \frac{3}{2} A_T$.

Exercice 5 On va voir que lorsqu'on replie $AB'F$, le triangle replié tient dans le triangle AFE, puis que lorsqu'on replie ADE il tient lui aussi dans AFE. (Ceci proviendra des conditions $b\sqrt{3} \leq a \leq b(1 + \sqrt{2})$.) Ainsi, le tapis final replié a simplement la forme du triangle AFE, et on calculera son aire.

1ère étape. Notons α l'angle $\widehat{BAC}$ (pour cet exercice on peut raisonner avec des angles non orientés). Les conditions pour que le triangle $AB'F$ une fois replié ne déborde pas de AFE sont que

$$\widehat{B'AF} \leq \widehat{FAE} \qquad \text{et} \qquad \widehat{B'FA} \leq \widehat{AFE}$$

Par construction les diagonales de $AFCE$ sont perpendiculaires donc c'est un losange. Ainsi $\widehat{CAE} = \alpha$ donc $\widehat{FAE} = 2\alpha$. De plus $\widehat{AFE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ensuite, par réflexion par rapport à la droite (EF) on a $\widehat{B'FA} = \widehat{BFC}$. En raisonnant dans les triangles rectangles ABC et FBC on trouve que $\widehat{B'FA} = \widehat{BFC} = 2\alpha$. Alors en raisonnant dans le triangle rectangle $B'FA$ on trouve $\widehat{B'AF} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Donc les deux conditions à exprimer sont

$$\frac{\pi}{2} - 2\alpha \leq 2\alpha \qquad \text{et} \qquad 2\alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$$

La première donne $\frac{\pi}{8} \leq \alpha$ et la deuxième $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$. Or l'hypothèse $b\sqrt{3} \leq a \leq b(1+\sqrt{2})$ signifie

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

De plus

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad , \quad \frac{b}{a} = \tan(\alpha) \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Comme la fonction tangente est croissante ceci est bien la même chose que $\frac{\pi}{8} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$. Donc a bien démontré que $AB'F$ se replie dans AFE.

2ème étape. Pour démontrer que ADE se replie dans AFE il faut montrer que

$$\widehat{DAE} \leq \widehat{FAE} \qquad \text{et} \qquad \widehat{DEA} \leq \widehat{AEF}$$

Or $\widehat{DAE} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ et $\widehat{DEA} = 2\alpha$ donc on voit que les conditions numériques à vérifier sont les mêmes que pour le triangle $AB'F$, donc le triangle ADE se replie dans AFE.

3ème étape. Pour calculer l'aire du tapis replié c'est-à-dire du triangle AFE, il suffit de calculer la distance AF. Soit h la longueur de la diagonale du rectangle (on a $h^2 = a^2 + b^2$ par Pythagore) et I le milieu de AC. En se plaçant dans les triangles rectangles AFI puis ABC on peut calculer $\cos(\alpha)$ de deux manières différentes et on trouve

$$\cos(\alpha) = \frac{h/2}{AF} = \frac{a}{h}$$

et on en déduit que $AF = \frac{h^2}{2a}$. Donc l'aire cherchée vaut

$$A = \frac{AF \times b}{2} = \frac{(a^2+b^2)b}{4a}$$

Exercice 6 On a $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. C'est l'aire de la portion de plan située entre l'axe des x (droite d'équation $y=0$), la parabole d'équation $y = x^2$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.