Corrigé du TD 4

Exercice 1

(1) La première inégalité revient juste à dire que $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Pour la deuxième, comme $a + b \leq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, en prenant la racine carrée on trouve $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(2) En utilisant l'inégalité ($\star$) avec $a = u_{n-1}$ et $b = v_{n-1}$ on trouve immédiatement $u_n \leq v_n$.

(3) D'après la question (2), pour tout n on a $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \leq \frac{1}{2}(v_n + v_n) = v_n$, donc (v_n) est décroissante.

(4) D'après la question (2) encore, on a $v_n \geq u_n$ donc $\sqrt{v_n} \geq \sqrt{u_n}$. En multipliant cela par $\sqrt{u_n}$ on déduit $u_{n+1} = \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} \geq \sqrt{u_n}\sqrt{u_n} = u_n$, donc (u_n) est croissante.

(5) Utilisons l'inégalité ($\star\star$) avec $a = u_n$ et $b = v_n - u_n$, alors $a + b = v_n$ et donc on obtient $\sqrt{v_n} \leq \sqrt{u_n} + \sqrt{v_n - u_n}$. Ainsi

$$0 \leq \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \leq \sqrt{v_n - u_n}$$

où l'inégalité $0 \leq \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}$ provient directement de la question (2). Cette inégalité est *primordiale* pour avoir le droit délever au carré (voir exercice 4), ce que nous faisons maintenant :

$$0 \leq (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 \leq v_n - u_n$$

En développant le carré on en déduit que $v_n - 2\sqrt{u_n v_n} + u_n \leq v_n - u_n$ et donc, en divisant par 2, on obtient l'inégalité demandée $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

(6) En utilisant la question (5), la récurrence est immédiate, on obtient $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ et donc par le théorème des gendarmes, $v_n - u_n$ tend vers 0. En conclusion (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc elles convergent toutes les deux.

Exercice 2

(1) La limite de g en $-\infty$ est $-\infty$, sa limite en $+\infty$ est $+\infty$, de plus $g(0) = 2$ et $g(1) = -7$. En utilisant trois fois le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que g a (au moins) un zéro dans chacun des trois intervalles $]-\infty; 0]$, $[0; 1]$ et $[1; +\infty]$. Comme un polynôme de degré 3 a au plus 3 zéros, on les a tous trouvés.

(2) Profitons de l'occasion pour faire quelques commentaires sur les valeurs approchées, sur la méthode de dichotomie et ses variantes, et corriger une imprécision dans le cours. D'abord quelques définitions :

- une *valeur approchée de b à 10^{-n} près par défaut* est un nombre v tel que $v \leq b \leq v + 10^{-n}$.
- une *valeur approchée de b à 10^{-n} près par excès* est un nombre v tel que $v - 10^{-n} \leq b \leq v$.
- une *valeur approchée de b à 10^{-n} près* est un nombre x tel que $|b - v| \leq 10^{-n}$.

Il est clair qu'il existe une infinité de valeurs approchées par défaut, ou par excès, de b.

Il est démontré dans le cours qu'il n'y a qu'une valeur approchée de b à 10^{-n} près par défaut qui soit un nombre décimal avec moins de n chiffres après la virgule, et telle que de plus $b < v + 10^{-n}$ (dans le cours, voir paragraphe 2.4, la dernière condition est oubliée). On appelle cette valeur l'*approximation décimale de b à 10^{-n} près par défaut*. De même il existe une unique *approximation décimale de b à 10^{-n} près par excès* qui est l'unique valeur approchée de b à 10^{-n} près par excès qui soit un nombre décimal avec moins de n chiffres après la virgule, et telle que de plus $v - 10^{-n} < b$. On l'appelle l'*approximation décimale de b à 10^{-n} près par excès.* La condition $b < v + 10^{-n}$ dans la définition de l'approximation décimale à 10^{-n} près par défaut sert à garantir que cette valeur est unique : sans cette condition, le nombre $b = 0,1$ pourrait avoir deux approximations décimales à 10^{-1} près par défaut, à savoir 0 et $0,1$ (vérifiez-le en l'écrivant !)

De retour à l'exercice, pour calculer des approximations de b, faisons l'observation suivante. Si on sait que b est dans un intervalle $[s;t]$ de longueur L (c'est-à-dire $L = t - s$) alors le milieu de l'intervalle $x = (s+t)/2$ est une approximation de b à $L/2$ près. (Vérifiez-le en exercice.) Ainsi, si on cherche une approximation à $0,1$ près, il suffit de trouver un intervalle contenant b et de largeur $0,2$ (ou moins).

Pour appliquer la méthode de dichotomie on procède donc ainsi :

- $g(0,5) = -2,125$ donc $b \in [0; 0,5]$
- $g(0,25) = 0,078125$ donc $b \in [0,25; 0,5]$
- $g(0,375) = -0,994\ldots$ donc $b \in [0,25; 0,375]$

On peut s'arrêter là car le dernier intervalle a une largeur inférieure à $0,2$, donc le milieu de l'intervalle est une valeur approchée à $0,1$ près. Ainsi $b \approx 0,3125$ à $0,1$ près. Notez que par cette méthode on n'obtient pas l'approximation décimale de b à 10^{-1} près par défaut, ni celle par excès.

On peut procéder différemment. Puisqu'on cherche un intervalle de largeur inférieure à $0,2$ contenant b, on peut couper l'intervalle $[0;1]$ en les 5 intervalles $[0; 0,2]$, $[0,2; 0,4]$,..., $[0,8; 1]$ et voir dans lequel est b.

- $g(0,2) = 0,488$
- $g(0,4) = -1,216$
- $g(0,6) = \ldots$
- $g(0,8) = \ldots$

On peut s'arrêter à $g(0,4)$ puisque le changement de signe se produit entre $0,2$ et $0,4$. On en déduit que $b \in [0,2; 0,4]$ et donc le milieu de l'intervalle : $0,3$ est une valeur approchée de b à $0,1$ près.

Pour obtenir l'approximation décimale de b à 10^{-1} près par défaut, qui n'est pas demandée dans l'exercice, il faut travailler un peu plus et calculer $g(0,3) = -0,343$. *Comme cette valeur est strictement négative on déduit que* $b \in [0,2; 0,3[$ *donc l'approximation décimale de b à 10^{-1} près par défaut est* $0,2$.

(3) Raisonnons pas l'absurde et supposons que b est un nombre rationnel, $b = p/q$ avec p et q entiers positifs premiers entre eux. En remplaçant dans l'équation satisfaite par b on a :

$$(\frac{p}{q})^3 - 3 \times (\frac{p}{q})^2 - 7 \times \frac{p}{q} + 2 = 0$$

d'où $p^3 - 3p^2q - 7pq^2 + 2q^3 = 0$. On en déduit que q divise p et p divise $2q$. Comme p et q sont premiers entre eux on doit avoir $q = 1$, et $p = 1$ ou $p = 2$. Comme $0 < b < 1$ on voit que c'est impossible.

Exercice 3 Si le symbole Σ vous gêne, n'hésitez pas à le remplacer par une somme avec des pointillés :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n}$$

Donc $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1}$ est la somme des deux derniers termes de S_{2n+3} c'est-à-dire

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-2n-2+2n+3}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geq 0$$

Donc (v_n) est en effet croissante. De même,

$$u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

donc (u_n) est en effet décroissante. Enfin il nous reste à montrer que $u_n - v_n$ tend vers 0. Or on trouve illico $u_n - v_n = S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ qui tend bien vers 0.

Exercice 4

(a) On peut toujours ajouter les inégalités terme à terme, donc à partir de $2 < x < 15$ et $12 < y < 18$ on déduit $14 < x + y < 33$. Pour multiplier, c'est un peu plus compliqué.

Lorsqu'on multiplie par -1 il faut inverser le sens des inégalités, donc pour encadrer $x - y$ on procède en deux temps. D'abord on encadre $-y$ ce qui donne $-18 < -y < -12$ et ensuite on ajoute avec l'encadrement de x. On obtient $-16 = 2 - 18 < x - y < 15 - 12 = 3$.

Enfin, on peut multiplier terme à terme deux inégalités *lorsque tous les termes sont positifs* et seulement dans ce cas :

$$0 \leq 2 < x < 15 \quad \text{et} \quad 0 \leq 12 < y < 18 \quad \text{donne} \quad 0 \leq 24 < xy < 15 \times 18 = 270$$

(b) La somme ne pose toujours pas de problème : $-7 < x + y < 6$.

Pour faire la différence on procède comme ci-dessus, on écrit d'abord que $-12 < -y < -8$ puis on ajoute : $-27 < x - y < -14$.

Pour encadrer xy, on encadre d'abord $-x$ pour avoir des quantités positives, d'où $6 < -x < 15$. On multiplie ensuite terme à terme pour obtenir $48 < -xy < 180$. Enfin on remultiplie par -1 et on trouve $-180 < xy < -48$.

Exercice 5 Ici il ne faut surtout pas essayer de calculer $(2,34547)^2$... Soyons plus malin et observons que la question posée est de connaître le signe du trinôme $x^2 - 5x + 6$ au point $x = 2,34547$. Pour factoriser ce trinôme, on peut calculer le discriminant et utiliser l'expression générale des racines. Une autre façon de faire est de remarquer que 2 est racine évidente, et comme le produit des racines est égal à $c/a = 6$, la seconde racine est 3. Finalement $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Un trinôme avec coefficient dominant $a = 1$ (positif) est négatif à l'intérieur de ses racines, or $x = 2,34547$ est situé entre les deux racines, donc la réponse est : négatif.

Exercice 6

(1) Pour $a = e$ on a $\log_a(x) = \log_e(x) = \ln(x)/\ln(e) = \ln(x)$ et $a^x = e^{x\ln(a)} = e^{x\ln(x)} = e^x$. Donc ln et exp sont les cas particuliers de $\log_a$ et $a^{(\cdot)}$ obtenus pour $a = e$. Dit autrement ln est le logarithme de base e et exp est l'exponentielle de base e.

(2) $\log_a(x) = y$ équivaut par définition de $\log_a$ à $\ln(x)/\ln(a) = y$ c'est-à-dire à $\ln(x) = y\ln(a)$. Ceci est encore équivalent à $x = \exp(y\ln(a))$ c'est-à-dire $x = a^y$.

(3) D'abord on remarque que la fonction $\log_a$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est le produit de la fonction ln par une constante. De plus on a

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

D'autre part la fonction $a^{(\cdot)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus comme $a^x = \exp(x\ln(a))$ on a

$$[a^{(\cdot)}]'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$$

On note que pour $a = e$ on retrouve les expressions habituelles des dérivées de ln et exp. Le tableau de variations et la représentation graphique pour $a = 2$ ressemblent au cas $a = e$ (cf TD).

(4) La réponse est non : $\log_2(3)$ n'est pas rationnel. Montrons-le par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers positifs premiers entre eux a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\log_2(3) = \ln(3)/\ln(2) = a/b$. Alors $b\ln(3) = a\ln(2)$ donc en utilisant une propriété fondamentale du logarithme, $\ln(3^b) = \ln(2^a)$. Il devrait en découler que $3^b = 2^a$, or ceci est impossible car $b \geq 1$ donc le membre de gauche est un entier divisible par 3 et pas le membre de droite.

Exercice 7

(1) Soit $v(n)$ le nombre de victimes au bout de n années. Au bout d'un an on a $v(1) = 98 \times 1,12$ victimes, au bout de deux ans $v(2) = 98 \times (1,12)^2$ victimes, ..., au bout de n ans on a $v(n) = 98 \times (1,12)^n$ victimes. Pour être tout à fait rigoureux il faut le démontrer par récurrence : c'est clair pour $n = 1$. Pour montrer que l'expression $v(n) = \dots$ a la propriété d'hérédité, on suppose que pour un entier n on a $v(n) = 98 \times (1,12)^n$, alors l'année suivante, par hypothèse il est multiplié par $1,12$ donc $v(n+1) = 98 \times (1,12)^{n+1}$ ce qui démontre le résultat.

(2) On pose simplement $v(t) = 98 \times (1,12)^t$. On voit que cette expression utilise l'exponentielle de base $1,12$, comme dans l'exercice 6.

(3) La dérivée est $v'(t) = \ln(1,12) \times 98 \times (1,12)^t \approx 11,1 \times (1,12)^y$, voir exercice 6 question (3). La dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction v est donc croissante. La courbe représentative passe par l'ordonnée 98 en $t = 0$ qui ressemble à une exponentielle classique, mais en plus « écrasé » c'est-à-dire qu'elle croît moins vite que exp en $+\infty$. (Et elle tend vers 0 en $-\infty$ si on la trace pour les $t \leq 0$, ce qui n'a pas beaucoup de sens dans notre problème, si ce n'est de voir quel est le passé de l'évolution de la maladie.)

(4) L'unité temporelle dans l'exercice étant l'année, un mois correspond à $1/12$. Entre l'instant t pour lequel $v(t) = 98 \times (1,12)^t$ et l'instant $t + 1$ mois $= t + 1/12$ pour lequel $v(t + 1/12) = 98 \times (1,12)^{t+1/12}$, le nombre de victimes est donc multiplié par

$$\frac{v(t + 1/12)}{v(t)} = \frac{98 \times (1,12)^{t+1/12}}{98 \times (1,12)^t} = (1,12)^{1/12}$$

La calculatrice donne pour valeur approchée à 10^{-4} près par excès : $1,0095$. C'est le facteur de développement de la maladie en 1 mois.

Pour savoir en combien de temps la moitié d'un pays de 60 millions d'habitants est atteinte par la maladie on cherche à résoudre $v(t) = 30 \times 10^6$. Cette équation s'écrit $98 \times (1,12)^t = 30 \times 10^6$ ou encore $(1,12)^t = \exp(t \ln(1,12)) = 30 \times 10^6/98$. En prenant le logarithme on trouve $t = \ln(30 \times 10^6/98)/1,12$ et la calculatrice nous dit que ça fait $11,28$ années, à 10^{-2} près par excès.

Exercice 8 Je détaille surtout les solutions des équations.

(1) Si on a bien fait l'étude de la fonction $f(x) = x + 1 - \ln(x)$ on trouve qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ s'annule en 1. Donc f est décroissante sur $]0;1]$, croissante sur $[1;+\infty[$, atteint son minimum en 1 où elle vaut $f(1) = 2$. Donc $f(x) > 0$ et l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

(1') Exercice : faites pareil avec $\ln(|x|) = x + 1$. Vous devez trouver une solution pour $x < 0$.

(2) Si on a bien fait l'étude de $g(x) = e^x - (x+2)$ on a trouvé que g continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$ sont toutes deux égales à $+\infty$, et $g(0) = -1$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $]-\infty;0]$ puis sur $[0;+\infty[$ on voit qu'il y a exactement une solution sur chacun de ces intervalles, notées x^- et x^+.

Cherchons une approximation de la solution négative x^-. On a $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(-2) = e^{-2} < 0$ donc $x^- \in [-2;-1]$. Comme on veut une approximation à 10^{-1} près il suffit ensuite de calculer (à la calculatrice) les valeurs de $0,2$ en $0,2$. On trouve que $f(-1,8) \approx -0,0347$ et $f(-2) \approx 0,1353$ donc $-1,9$ est une approximation à 10^{-1} près.

Cherchons une approximation de la solution positive x^+. On a $f(1) = e - 3 < 0$, $f(2) = e^2 - 4 > 0$ donc $x^- \in [1;2]$. On calcule ensuite les valeurs de $0,2$ en $0,2$. On trouve que $f(1) \approx -0,2817$ et $f(1,2) \approx 0,1201$donc $1,1$ est une approximation à 10^{-1} près.

Exercice 9

(1) On constate que pour pouvoir placer le point correspondant à la dixième année il faut choisir une échelle en ordonnée qui va jusqu'à $y = 2^{10} = 1024$. Sur une telle échelle, la population de lapins des premières années : 2, 4, 8... est quasiment confondue avec l'axe des abscisses ! On ne la lit pas facilement.

(2) On voit que cette fois-ci la représentation graphique est une droite. On distingue bien mieux les valeurs des premières années.