Corrigé du TD 3

Exercice 1 Si tous les facteurs premiers $q_q, \ldots, q_r$ qui divisent p apparaisssent avec une puissance paire dans sa DFP (notons alors $\alpha_i = 2\beta_i$ la puissance de q_i dans la DFP) alors p est carré puisque

$$p = q_1^{\alpha_1} \ldots q_r^{\alpha_r} = (q_1^{\beta_1} \ldots q_r^{\beta_r})^2$$

L'hypothèse de l'énoncé est que p n'est pas un carré parfait, donc, il existe un facteur premier diviseur de p (notons-le q) et dont la puissance α dans la DFP de p n'est pas paire, c'est-à-dire qu'il existe un entier β tel que $\alpha = 2\beta + 1$. On a donc $p = q^{2\beta+1}p'$ avec p' non divisible par q.

Par l'absurde, supposons que $\sqrt{p}$ est un nombre rationnel, et montrons qu'on arrive à une contradiction. Dans ce cas, il existe deux entiers premiers entre eux a, b tels que

$$\sqrt{p} = a/b$$

On en déduit que $a^2 = pb^2 = q^{2\beta+1}p'b^2$. Soit i, resp. j, la puissance de q dans la DFP de a, resp. b. On peut donc écrire

$$a = q^i a' \quad \text{et} b = q^j b'$$

avec a' et b' non divisibles par q. En reportant dans $a^2 = q^{2\beta+1}p'b^2$ on obtient :

$$q^{2i}(a')^2 = q^{2\beta+1}p'q^{2j}(b')^2 = q^{2\beta+2j+1}p'(b')^2$$

On a à gauche un nombre dont la puissance de q dans la DFP est paire ($2i$) et à droite un nombre dont la puissance de q dans la DFP est impaire ($2\beta + 2j + 1$). Or ces nombres sont égaux. Par unicité des exposants dans la DFP, c'est impossible.

Exercice 2

(1) Les dix premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_1 = \tfrac{1}{3} \approx 0,33333\ldots \qquad u_2 = \tfrac{1}{12} \approx 0,0833333\ldots \qquad u_3 = \tfrac{1}{27} \approx 0,037037037\ldots$$

$$u_4 = \tfrac{1}{48} \approx 0,020833333\ldots \qquad u_5 = \tfrac{1}{75} \approx 0,013333\ldots \qquad u_6 = \tfrac{1}{108} \approx 0,009259259259\ldots$$

$$u_7 = \tfrac{1}{147} \approx 0,00680272108844\ldots \qquad u_8 = \tfrac{1}{192} \approx 0,00520833333\ldots \qquad u_9 = \tfrac{1}{243} \approx 0,00411522633745\ldots$$

$$u_{10} = \tfrac{1}{300} \approx 0,00333333\ldots$$

Les dix premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$v_1 = \tfrac{2}{5} = 0,4\ldots \qquad v_2 = \tfrac{2}{3} \approx 0,66666666\ldots \qquad v_3 = \tfrac{6}{7} \approx 0,857142857142\ldots$$

$$v_4 = 1\ldots \qquad v_5 = \tfrac{10}{9} \approx 1,1111111\ldots \qquad v_6 = \tfrac{6}{5} = 1,2$$

$$v_7 = \tfrac{14}{11} \approx 1,27272727\ldots \qquad v_8 = \tfrac{4}{3} \approx 1,33333333\ldots \qquad v_9 = \tfrac{18}{13} \approx 1,384615384615\ldots$$

$$v_{10} = \tfrac{10}{7} \approx 1,42857142857\ldots$$

Les dix premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à 10^{-6} près par défaut :

$$w_1 \approx 0,540302\ldots \qquad w_2 \approx -0,208073\ldots \qquad w_3 \approx -0,329997\ldots$$

$$w_4 \approx -0,163410\ldots \qquad w_5 \approx 0,056732\ldots \qquad w_6 \approx 0,160028\ldots$$

$$w_7 \approx 0,107700\ldots \qquad w_8 \approx -0,018187\ldots \qquad w_9 \approx -0,101236\ldots$$

$$w_{10} \approx -0,083907\ldots$$

(2) Cherchons un N tel que $n > N$ implique $u_n \leq 10^{-4}$. On veut donc

$$\frac{1}{3n^2} \leq \frac{1}{10^4}$$

ce qui équivaut à $10^4 \leq 3n^2$ ou encore $\sqrt{10^4/3} \leq n$.

Choisissons $N = E(\sqrt{10^4/3}) + 1$, c'est un entier supérieur ou égal à $\sqrt{10^4/3}$, donc si $n \geq N$ alors $n \geq \sqrt{10^4/3}$ et donc $u_n \leq 10^{-4}$ d'après ce qui précède. Comme $u_n \geq 0$, on a a fortiori

$$-10^{-4} \leq u_n \leq 10{-}4$$

(3) La question (2) ne servait qu'à donner des idées pour démontrer celle-ci. En transposant la définition générale de x_n *admet* x *pour limite ssi...* dans le cas de notre suite, on trouve que u_n admet 0 pour limite ssi (par définition !)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N\ \Rightarrow\ -\varepsilon \leq \frac{1}{3n^2} \leq \varepsilon$$

Pour démontrer que u_n admet 0 pour limite, c-à-d que la phrase avec quantificateurs ci-dessus est vraie, on choisit un $\varepsilon > 0$ et on doit montrer qu'il existe un entier N tel que la fin de la phrase soit vraie. Or, pour avoir $\frac{1}{3n^2} \leq \varepsilon$ lorsque $n \geq N$, il suffit de poser $N = E(1/\sqrt{3\varepsilon}) + 1$. On a bien, ainsi, dès que $n \geq N$,

$$-\varepsilon \leq 0 \leq \frac{1}{3n^2} \leq \varepsilon$$

Ceci démontre que u_n a 0 pour limite.

(4) Dans cette question on ne démontre plus l'existence de limites en revenant à la définition comme ci-dessus, mais en utilisant les théorèmes usuels (cf le cours) sur les compositions, sommes (etc.) de limites. Pour la suite v_n qui est une fraction rationnelle, on regarde les termes dominants au numérateur (c'est $2n$) et au dénominateur (c'est n). Donc le comportement de v_n est le même que celui de $2n/n = 2$, donc v_n admet 2 pour limite. Pour w_n on dit simplement que le cosinus est compris entre -1 et 1, donc

$$-\frac{1}{n} \leq w_n = \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

D'après le théorème des gendarmes, w_n admet 0 pour limite.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$. Elle est continue car c'est un polynôme. Comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = 0$.

De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (toujours car c'est un polynôme) et sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 + 1$. La dérivée étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante. Comme elle est de plus continue, d'après le théorème de la bijection monotone, la fonction f est bijective sur $\mathbb{R}$. Donc elle ne peut avoir qu'une racine sur $\mathbb{R}$.

On va maintenant montrer que a n'est pas rationnel, en raisonnant par l'absurde. Si on avait $a = r/s$ avec r, s entiers naturels premiers entre eux, alors en remplaçant dans l'équation dont a est solution on aurait

$$(\frac{r}{s})^3 + \frac{r}{s} - 1 = 0$$

En multipliant par s^3 on a $r^3 + rs^2 - s^3 = 0$. Ainsi $s^3 = r^3 + rs^2$ qui est divisible par r, donc s doit être divisible par r, c'est en contradiction avec le fait que r et s sont premiers entre eux.

Exercice 4 On reconnaît une identité remarquable : en posant $a = 83875683470$ on trouve $x = a^2 - (a-1)(a+1) = 1$.

Exercice 5 On a $10^{2000} - 2000 = 10^3(10^{1997} - 2) = 10^3 \times \underbrace{9999\ldots99}_{1996 \text{ fois}}8 = \underbrace{9999\ldots99}_{1996 \text{ fois}}8000$. Donc la somme des chiffres est $9 \times 1996 + 8 = 9 \times (2000 - 4) + 8 = 18000 - 36 + 8 = 17972$.

Exercice 6 On multiplie haut et bas par la quantité conjuguée $1 - \sqrt{3}$: Calculons

$$A = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \frac{2(1-\sqrt{3})}{1-3} = 1 - 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Pour B on peut faire des calculs dans le même genre, mais je vais être un peu plus astucieux en posant $x = 1+\sqrt{3}$. L'idée maintenant, c'est d'exprimer $1/x$ en fonction de x. On a $x^2 = 1+2\sqrt{3}+3 = 2x+2$. En divisant par x on en tire $x = 2 + \frac{2}{x}$ donc $\frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{x}$. Alors,

$$B = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}x} = 1 + \frac{2}{x} = x - 1 = \sqrt{3}$$

Enfin,

$$C = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3} = \frac{8^{2n}(8+1)^2}{4^{3n-3}(4-1)^3} = \frac{2^{6n} \times 81}{2^{6n-6} \times 27} = 2^6 \times 3 = 192$$

Exercice 7 On suppose que $a \neq 0$, sinon on a une équation du premier degré et il est facile de trouver les solutions comme vous savez. Alors on écrit $ax^2 + bx + c$ comme le début du développement du carré

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$

Si on pose $\Delta = b^2 - 4ac$, cela donne :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Donc $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Lorsque $\Delta < 0$ on voit qu'il n'y a pas de solution, lorsque $\Delta = 0$ on voit qu'il n'y a qu'une racine (double), et enfin lorsque $\Delta \geq 0$ on obtient l'expression bien connue des racines

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$