Corrigé du TD 2

Exercice 2 D'abord on calcule la DFP de 780 : $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$. Si on veut un nombre décimal a/b (ceci étant une écriture sous forme de fraction irréductible), il faut que les seuls facteurs premiers de b soient 2 et 5.

Profitons-en pour faire un rappel : par définition 1 *n'est pas un nombre premier. Ceci est motivé par le fait que les nombres premiers sont ceux qui servent à écrire tout nombre comme un produit unique, or si on acceptait que* 1 *soit un nombre premier, on n'aurait pas d'unicité possible car on pourrait multiplier par* 1 *autant de fois que l'on veut, c'est-à-dire ajouter un facteur* 1^n *à la DFP. En conséquence, à proprement parler seuls les nombres* ≥ 2 *ont une DFP (cf cours du 1er semestre). Cependant on considère en général que la DFP du nombre* 1 *est égale à* 1 *lui-même.*

Au vu de ce rappel, les valeurs possibles pour notre nombre b sont 1 ainsi que les produits de puissances de 2 et de 5 (contenues dans $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ naturellement). Notons enfin que pour que a et b soient premiers entre eux, il faut que l'on prenne dans b la puissance de 2 (ou de 5) la plus grande possible, car sinon, par exemple si on prend $b = 2$, alors $a = 2 \times 3 \times 5 \times 13$ est lui aussi divisible par 2. En conclusion, $b = 1$ ou $b = 4$ ou $b = 5$ ou $b = 20$. On trouve alors respectivement $a = 780$, $a = 195$, $a = 156$ et $a = 39$.

Exercice 3 Après avoir calculé les première valeurs de F_n on a l'impression que ce n'est jamais un nombre décimal. Nous allons le montrer, pour cela, on suppose que pour un certain $n \geq 2$ (on sait que $F_1 = 11/6$ n'est pas décimal) le nombre F_n est décimal, et on va montrer qu'on obtient une contradiction.

1ère étape : traduction de l'énoncé. Dire que F_n est décimal, par définition c'est dire qu'il existe des entiers $a \geq 1$ et $k \geq 0$ tels que $F_n = a/10^k$ ($a \geq 1$ car $F_n \geq 0$). Or on a

$$F_n = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)} ,$$

donc on obtient $an(n+1)(n+2) = 10^k(3n^2 + 6n + 2)$.

2ème étape : un petit calcul. Montrons que le seul facteur premier commun à $n(n+1)(n+2)$ et $3n^2 + 6n + 2$ est 2. Soit p un tel facteur premier commun ; on observe que p divise n, ou $n+1$, ou $n+2$, et on distingue donc trois cas.

(1) Si p divise n, alors $3n^2 + 6n + 2 \equiv 2\ (p)$. (*N'oubliez pas que p divise n signifie que $n \equiv 0\ (p)$, donc* $3n^2 + 6n + 2 \equiv 2\ (p)$.) Donc p ne peut diviser $3n^2 + 6n + 2$ que si $p = 2$.

(2) Si p divise $n+1$ on a : $n + 1 \equiv 0\ (p)$ c'est-à-dire $n \equiv -1\ (p)$, donc

$$3n^2 + 6n + 2 \equiv 3(-1)^2 + 6(-1) + 2 = -1\ (p) .$$

Dans ce cas-là il est impossible que p divise $3n^2 + 6n + 2$.

(3) Si p divise $n+2$ on a $n + 2 \equiv 0\ (p)$ c'est-à-dire $n \equiv -2\ (p)$, donc

$$3n^2 + 6n + 2 \equiv 3(-2)^2 + 6(-2) + 2 = 2\ (p) .$$

Donc $p = 2$ ici encore.

3ème étape : conclusion. Des trois nombres n, $n+1$ et $n+2$, l'un au moins est divisible par 3. Comme le seul facteur premier commun à $n(n+1)(n+2)$ et $3n^2+6n+2$ est 2 (deuxième étape), ce facteur 3 ne divise pas $3n^2+6n+2$. Comme 3 n'est pas non plus un diviseur de 10, une égalité $an(n+1)(n+2) = 10^k(3n^2+6n+2)$ comme dans l'étape (1) ne peut pas avoir lieu. De la contradiction, on déduit que F_n n'est pas décimal.

Un petit complément. On peut déduire de ce qui précède une écriture sous forme de fraction irréductible pour F_n. En effet, dans l'étape (2) on a montré que le seul facteur premier possible p commun à $n(n+1)(n+2)$ et $3n^2+6n+2$ était $p=2$. On a même montré que ceci ne pouvait se produire que si $p|n$ ou $p|n+2$, donc (puisque $p=2$) n est pair.

Ainsi lorsque n est impair, $n(n+1)(n+2)$ et $3n^2+6n+2$ sont premiers entre eux donc l'écriture

$$F_n = \frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}$$

est bien une forme irréductible.

Et si $n=2k$ est pair, alors n^2 et $6n$ sont divisibles par 4 de sorte que modulo 4 on a

$$3n^2+6n+2 \equiv 2\ (4)$$

Donc $3n^2+6n+2$ est divisible par 2 mais pas par 4, et par suite, F_n est mis sous forme de fraction irréductible en divisant le numérateur et le dénominateur par 2. Précisément, comme $n=2k$ on peut écrire

$$F_n = F_{2k} = \frac{6k^2+6k+1}{2k(2k+1)(k+1)}$$

Exercice 4 Je ne donne la correction que pour un exemple qui n'est pas dans la feuille : $x = 123814,2857142857....$ La méthode la plus rapide consiste à repérer la séquence qui est périodique, ici c'est 142857 (attention : elle commence avant la virgule). On n'a besoin de connaître en fait que sa longueur qui est 6, on multiplie le nombre donné par 10^6 ;

$$10^6 \times 123814,2857142857\cdots = 123814285714,2857\ldots$$

de sorte que $10^6x - x = 123814285714 - 123814 = 123814161900 = (10^6-1)x$. Alors

$$x = \frac{123814161900}{999999} = \frac{866700}{7}$$

La deuxième méthode expliquée en TD est d'écrire

$$\begin{aligned} 123814,2857142857\ldots &= 123800 + \tfrac{142857}{10^4} + \tfrac{142857}{10^{10}} + \tfrac{142857}{10^{16}} + \ldots \\ &= 123800 + \tfrac{142857}{10^4}(1 + \tfrac{1}{10^6} + \tfrac{1}{10^{12}} + \ldots) \end{aligned}$$

Alors on utilise la formule valable pour $|q|<1$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

et on obtient en prenant $q = 1/10^6$

$$123814,2857142857\cdots = 123800 + \frac{142857}{10^4} \times \frac{1}{1-1/10^6} = \ldots$$

on conclut comme ci-dessus.

Exercice 5 À propos de cet exercice, voir aussi le « complément » qui est en ligne sur la page web.

Par définition, dire que « le pourcentage de réussite a été de $47,82\%$ par défaut » veut dire que

$$\frac{47,82}{100} \leq \frac{a}{b} < \frac{47,83}{100}$$

On en déduit que $10^4 a < 4783b \leq 4783 \times 30 = 143490$. Il en découle que $a \leq 14,34\ldots$ donc $a \leq 14$.

Comme $a/b < 1/2$ on a $b > 2a$. En fait a/b est très proche de $1/2$ et on peut donc penser que $b = 2a + 1$. On va le montrer, pour cela il suffit de montrer que $b \geq 2a + 2$ est impossible. Or si $b \geq 2a + 2$ on a $a/b \leq a/(2a + 2)$ donc

$$\frac{47}{100} \leq \frac{47,82}{100} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{a}{2a+2}$$

En multipliant par $a + 1$ on en déduit $47(a + 1) < 50a$ donc $47 \leq 3a$. Ceci entraîne $a > 15$ ce qui est impossible, on l'a vu. La conclusion est que $b = 2a + 1$.

Pour trouver a repartons de l'inégalité

$$\frac{47,82}{100} \leq \frac{a}{2a+1} < \frac{47,83}{100}$$

On en tire $47,82(2a+1) \leq 100a < 47,83(2a+1)$ et donc $47,82 \leq 4,36 \times a$ d'une part et $4,34 \times a < 47,83$ d'autre part. Donc

$$10,96\cdots = \frac{47,82}{4,36} \leq a < \frac{47,83}{4,34} = 11,02\ldots$$

Donc $a = 11$. Alors $b = 2a + 1 = 23$ et $a/b = 0,478260\ldots$