Corrigé du TD 1

Exercice 1 Les nombres entiers naturels servent pour le **dénombrement**. Ils permettent de compter les éléments d'un ensemble fini (par exemple le nombre de moutons dans le troupeau). Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$.

Les nombres entiers relatifs servent pour l'**échange**. Ils permettent de compter les différences : différence de température entre deux instants ; différence de niveau lors du déplacement d'un ascenceur ; différence d'argent lors d'un paiement. Dit autrement ils quantifient l'évolution dans le temps de deux dénombrements : par exemple, l'évolution du nombre de moutons dans le troupeau lors d'un achat (évolution positive) ou lors d'une vente (évolution négative). Leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$.

Les nombres rationnels servent pour le **partage**. Ils permettent de compter les ratios : proportion du gâteau distribuée à chaque invité, pourcentage de votants dans une élection... Dit autrement ils quantifient la part du total représentée par une partie : par exemple, la proportion des moutons tombés malades lors d'une épidémie. Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$.

Les nombres réels servent pour la **mesure des grandeurs**. Ils permettent de mesurer les diverses dimensions qui apparaissent dans le monde réel : longueur, aire, volume, intensité électrique, lumineuse, débit, densité volumique... Par exemple, la taille de l'oreille d'un mouton. Leur ensemble est noté $\mathbb{R}$.

Les nombres décimaux servent pour l'**approximation des réels**. L'Homme ne peut que donner des valeurs approchées des grandeurs qu'il cotoie, et pour cela il utilise des nombres qui ont une écriture décimale finie. Les décimaux sont les nombres qui peuvent être donnés par une calculatrice ou un ordinateur. Par exemple, la taille de l'oreille d'un mouton arrondie au micron (millionième de mètre). Leur ensemble est noté $\mathbb{D}$.

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Aucune de ces inclusions n'est une égalité. En effet -1 est un entier relatif qui n'est pas un entier naturel, $1/10$ est un nombre décimal qui n'est pas entier relatif, $1/3$ est un nombre rationnel qui n'a pas d'écriture décimale finie, et $\sqrt{2}$ est un nombre réel qui mesure la diagonale du carré, ce n'est pas un rationnel.

Exercice 2

$$4,999 < 5,891 < \frac{65}{11} < \frac{21}{3,51} < 5,99 < \frac{18}{3} < \sqrt{37} < \frac{43}{7} < \frac{\sqrt{401}}{3,2}$$

Exercice 3 Soit S la somme détenue au départ par le curé. Au premier mendiant il donne $S/2+1$ et il lui reste donc $S/2-1$. Au second il donne $(S/2-1)/2+2$ et il lui reste donc $(S/2-1)/2-2$. Au troisième et dernier il donne $((S/2-1)/2-2)/2+3$ et il lui reste donc

$$((S/2-1)/2-2)/2-3 = S/8-1/4-1-3 = S/8-17/4$$

D'après l'énoncé il lui reste 1 euro donc $S/8-17/4 = 1$ d'où $S = 42$. Il a donc donné 41 aux trois mendiants, et Dieu lui rendra 4100.

Exercice 4 Soit V le volume du petit verre, de sorte que le volume du grand est $2V$. Le « contenant » qui permet de réunir les liquides des deux verres a un volume égal à $3V$. La quantité totale de vin est égale, d'après l'énoncé, à

$$\frac{1}{2} \times V + \frac{1}{4} \times 2V = V$$

Donc la proportion de vin dans le grand contenant est $\frac{V}{3V} = \frac{1}{3}$.

Pour trouver la réponse on peut aussi utiliser la formule, bien connue en chimie, qui donne la concentration c_f de la solution finale en fonction des concentrations c_i des diverses solutions que l'on mélange :

$$c_f v_f = \sum c_i v_i$$

ce qui donne

$$c_f = \frac{1}{v_f} \times \sum c_i v_i = \frac{1}{3V} \times \left(\frac{1}{2} \times V + \frac{1}{4} \times 2V\right) = \frac{1}{3}$$

Exercice 5 Le vieux cheik a dit qu'il distribuerait $1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18$ de son cheptel, ainsi, il n'a pas tout distribué ! Selon sa volonté il doit y avoir $1/18$ de son troupeau de dromadaires qui n'est pas distribué, soit $17/18$-ème de dromadaire.

Or, en empruntant un dromadaire au voisin, ce que le vieux cheik n'avait pas indiqué, on a pu distribuer tous les dromadaires, de sorte qu'il n'en reste pas. On a distribué $17/18$-ème de dromadaire en trop (par rapport à ce qu'avait indiqué le cheik) et ce n'est donc pas paradoxal que chacun des fils ait au plus que prévu.

Exercice 6 Dans chacun des cas, appelons u_n le n-ème terme de la suite de nombres. Voici les règles qui permettent de calculer les termes :

(a) $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Cette suite est appelée la suite de Fibonacci.

(b) $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$.

(c) $u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$.

(d) u_n est le n-ème nombre premier. Les suivants sont $29, 31, \ldots$

(e) u_n est le n-ème carré, lu à l'envers. Les suivants sont $121, 441, \ldots$

(f) $u_{n+1} = 2u_n$ donc directement $u_n = 2^{n-1}$.

(g) Il y a deux descriptions de cette suite qui semblent « coller ». La première distingue en fonction de la parité de l'indice n du terme qu'on veut calculer, précisément $u_{2n} = 2u_{2n-1} + 1$ et $u_{2n+1} = 2u_{2n} - 1$. La seconde est simplement $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$.

(h) Ici encore proposons deux façons de voir cette suite. La première est donnée par $u_{2n} = u_{2n-1} + 4$ et $u_{2n+1} = u_{2n} + 2$. La seconde consiste simplement à dire que la suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$ énumère tous les nombres qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 3.

(i) $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$.

(j) $u_{n+1} = u_n + n$. On peut aussi dire que $u_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$. Ces nombres sont appelés « nombres triangulaires ».

Essayons de calculer u_{100} pour chacune de ces suites. Pour certaines, ce n'est pas possible car le 100-ème terme est énorme et il n'y a pas de formule simple pour le donner. Dans un premier temps, vous pourrez essayer de démontrer par récurrence qu'on a :

(a)

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

(f) $u_n = 2^{n-1}$

(g) $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3}$

(h) $u_n = 1 + 2(n-1) + 2E\left(\frac{n}{2}\right)$

(j) $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Ceci permet de calculer certains des 100-èmes termes :

(a)

$$u_{100} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{99}$$

(b) u_{100} est énorme et sans formule simple.

(c) u_{100} est énorme et sans formule simple.

(d) $u_{100} = 541$ est le 100-ème nombre premier.

(e) u_{100} est le 100-ème carré, lu à l'envers. Comme $(100)^2 = 10000$, lu à l'envers, c'est $u_{100} = 1$!

(f) $u_{100} = 2^{99}$.

(g) $u_{100} = \frac{2^{100}+(-1)^{100}}{3}$.

(h) $u_{100} = 1 + 2(100-1) + 2E\left(\frac{100}{2}\right) = 299$.

(i) u_{100} est énorme et sans formule simple.

(j) $u_{100} = 100 \times 99/2 = 4950$.