Devoir à la maison

Les trois parties de ce problème peuvent être abordées de manière tout à fait indépendante.
La longueur de l'énoncé est liée à la description de l'expérience, et non à la difficulté.

$\therefore$

Dans un laboratoire de recherche sur la pollution atmosphérique à Paris, des chercheurs parviennent à isoler un composé gazeux soufré particulièrement dangereux, et ils souhaitent connaître ses propriétés de dilatation sous des températures estivales (au-dessus de $20°C$). Pour cela, ils ont besoin de savoir si le gaz satisfait la loi des gaz parfaits, et si non, d'avoir un modèle approché donnant l'équation d'état du gaz.

Les chercheurs étudient $n = 1$ mole du gaz. Ils font l'hypothèse que lors d'un bel été, la pression est égale à $P = 1$ atmosphère, et pour faire leur expérience il se placent sous cette pression constante. Ils font une expérience et fournissent le compte-rendu suivant :

- Conditions d'expérience : nombre de moles de gaz : $n = 1$; pression ambiante : $P = 1$ atm.
- Données : constante des gaz parfaits $R = 8,31\, J.K^{-1}.mol^{-1}$.
- Relevé des mesures :

$T(°C)$	20	$22,5$	25	$27,5$	30
$V(\ell)$	$23,369066$	$23,486612$	$23,603512$	$23,719774$	$23,835405$
$PV/RT(mol)$	$1,029059$	$1,032640$	$1,036215$	$1,039782$	$1,043342$

$T(°C)$	$32,5$	35	$37,5$	40
$V(\ell)$	$23,950412$	$24,064803$	$24,178584$	$24,291762$
$PV/RT(mol)$	$1,046895$	$1,050440$	$1,053979$	$1,057511$

$T(°C)$	$42,5$	45	$47,5$	50
$V(\ell)$	$24,404345$	$24,516338$	$24,627749$	$24,738583$
$PV/RT(mol)$	$1,061036$	$1,064555$	$1,068066$	$1,071571$

A. Lecture des résultats

(A.1) Rappelez la loi des gaz parfaits. Quelles sont les unités du système international (S.I.) utilisées pour mesurer les différentes quantités impliquées dans cette formule ? Donnez leur relation avec les unités utilisées ci-dessus (atmosphère (atm), degré Celsius ($°C$), litre (ℓ)).

(A.2) Qu'est-ce qui indique, dans ces résultats, que le gaz ne se comporte pas tout à fait comme un gaz parfait ?

B. Un modèle approché pour l'équation d'état

L'un des chercheurs, qui a déjà fait des mesures sembables dans d'autres grandes villes, suggère la possibilité que le ratio PV/RT soit le produit d'une constante par une fonction exponentielle de V. On se propose de tester cette suggestion.

(B.1) Ajoutez une ligne au tableau de mesures, dans laquelle vous calculerez $\ln(PV/RT)$.

(B.2) Placez les données du tableau sur un graphique en reportant $\ln(PV/RT)$ (en ordonnée) en fonction de V (en abscisse). (On dit qu'on a pris une *échelle logarithmique* en ordonnée.)

(B.3) Tracez une droite qui passe « au plus près » des points du graphique. Donnez son coefficient directeur (noté a) et son ordonnée à l'origine (notée b).

(B.4) Expliquez comment le graphique précédent permet de tester la suggestion faite par le chercheur. Se vérifie-t-elle ?

(B.5) Soient c, x, y des nombres réels, avec c strictement positif. À partir de la définition d'une fonction exponentielle, démontrez que $c^{xy} = (c^x)^y$.

(B.6) Montrez que de l'équation d'état, établie dans les questions (B.3) et (B.4), on peut tirer une équation de la forme $V\alpha^{-V} = \beta T$, où α et β sont des constantes qui s'expriment à l'aide de P, R et des coefficients a, b calculés dans la question (B.3). (*Utilisez (B.5) si besoin.*) On ne cherchera pas à donner des valeurs numériques pour α et β.

(B.7) (Question facultative : discussion sur la méthode de calcul de a et b.) Le sens donné à l'expression « *au plus près des points* » étant affaire de convention, on peut proposer plusieurs droites répondant à la question précédente. Proposez une méthode permettant de calculer, à partir des seules coordonnées des points tracés (donc sans faire appel au graphique), les coefficients d'une équation de droite $y = ax + b$ passant près de ces points.

C. Étude mathématique du volume en fonction de la température

Dans cette dernière partie, on étudie l'équation d'état lorsque $\alpha = 1,030$ et $\beta = 0,159$, c'est-à-dire

$$V \times 1,030^{-V} = 0,159T$$

avec la température T en Kelvin et le volume V en litres.

On pourra avoir intérêt à ne pas remplacer trop tôt α et β par leurs valeurs numériques. On pose $f(V) = V\alpha^{-V}$ et on étudie cette fonction sur l'intervalle $I =]0; \frac{1}{\ln(\alpha)}[$.

(C.1) Dites quel est l'intervalle $f(I)$. Démontrez que f est une fonction bijective de I sur $f(I)$.

(C.2) Rappelez la définition de la fonction réciproque d'une fonction bijective. On note $g = f^{-1}$ la fonction réciproque de f (on ne cherchera pas à l'expliciter : il n'existe pas de formule simple donnant g). Justifiez que $V = g(\beta T)$ et que g est croissante. Que cela veut-il dire quant aux variations de volume du gaz en fonction de la température ?

(C.3) En utilisant la méthode de votre choix, donnez une valeur approchée en litres, à 10^{-2} près par défaut, du volume du gaz à la température $T = 333,15$ Kelvin (c'est-à-dire $60°C$).