Licence FONDNATEXP **LG 310**
C. Cazes : claire.cazes@upmc.fr

Sommaire

Des références à des sites internet avec images et animations sont données dans le fil du texte. Pour un exposé beaucoup plus complet des notions abordées dans les chapitres 1 et 3, on pourra consulter : *Mathématiques d'école* Daniel Perrin , Ed Cassini 2006.

Chapitre 1

Extension de la notion de nombre

Extension de la notion de nombre

I Le corps des nombres rationnels

Introduction
L'ensemble des nombres entiers est né de la nécessité de compter (sur ses doigts et au delà). L'ensemble des entiers relatifs est né de la nécessité de pouvoir résoudre une équation du type $a = b + x$, lorsque *b* est plus grand que *a*. Ce qui correspond par exemple à des situations de dettes.
L'ensemble des rationnels répond à la nécessité de résoudre des équations du type $a = bx$. Ce qui correspond à des situations de partages.

1.1 L'ensemble Q

Définition. l'ensemble **Q** est un ensemble de nombres appelés nombres rationnels et notés sous forme de fractions $\frac{a}{b}$ (ou parfois a/b) avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$. L'entier *a* est appelé numérateur de la fraction et l'entier *b* dénominateur.

Remarques

1. Le fait de prendre le numérateur non nul vient du fait qu'on ne peut pas diviser par 0 car sinon on aurait a=0x ce qui est impossible si *a* est non nul. Le fait de prendre le dénominateur strictement positif ne restreint pas la généralité d'après la règle des signes.
2. Une première difficulté est qu'un nombre rationnel est représenté par un couple de nombres : le numérateur (entier relatif) et le dénominateur (entier naturel non nul). Ou encore, si l'on garde l'image du partage : le nombre à partager et le nombre de parts.
3. Une seconde difficulté est que l'écriture d'un nombre rationnel sous forme de fraction n'est pas unique, par exemple $\frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{14}{70}$. En effet, si $x = \frac{2}{10}$, cela signifie que 2=10 x, mais en divisant par 2 les deux membres de l'égalité, on a 1=5x et donc $x = \frac{1}{5}$. On voit même qu'un nombre rationnel admet une infinité d'écritures fractionnaires. On a ainsi appliqué la règle de simplification des fractions c'est-à-dire $\frac{pa}{pb} = \frac{a}{b}$; $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^*, p \in \mathbf{N}^*$
4. Les entiers relatifs sont des nombres rationnels car si x est un entier relatif, $x = \frac{x}{1}$. On a ainsi l'inclusion : $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. En revanche, tout rationnel n'est pas un entier, par exemple le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas un entier.

Il nous faut préciser dans quel cas deux fractions sont égales c'est-à-dire représentent le même nombre rationnel.

Définition. Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si $ad = bc \quad b \neq 0; d \neq 0$.

Remarque. On voit maintenant qu'on peut vérifier l'égalité $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ de deux manières soit en appliquant la définition ci-dessus soit en utilisant la règle de simplification. Ces deux règles sont bien évidemment équivalentes.

Proposition. Tout nombre rationnel non nul x admet une unique écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$, telle que a et b soient premiers entre eux.

Preuve. *Existence* Soit un rationnel x et $\frac{c}{d}$ une écriture fractionnaire de x avec $c \in \mathbf{Z},\ d \in \mathbf{N^*}$. Soit n le pgcd de c et d alors il existe des entiers relatifs c' et d' premiers entre-eux et tels que : $c = nc$' et $d = nd$' En simplifiant la fraction par n , on obtient $x = \frac{c}{d} = \frac{nc'}{nd'} = \frac{c'}{d'}$ avec c' et d' premier entre eux. De plus, a et a' sont nuls car x est non nul.

Unicité Si $x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ avec $a \in \mathbf{Z}; a' \in \mathbf{Z}; b \in \mathbf{N^*}; b' \in \mathbf{N^*}$ a et b premiers entre eux et a' et b' premiers entre eux.
Les fractions étant égales, on a $ab'=ba'$.
Donc a divise ba', comme a est premier avec b, a divise a' d'après le théorème de Gauss. Donc il existe un entier relatif k tel que $a'=ka$.
En remplaçant, il vient : $ab'=bka$ donc, en divisant par a non nul, il vient $b'=bk$. Ainsi, k divise a' et b'. Or a' et b' sont premiers entre-eux donc $k = 1$ ou $k = -1$ mais comme b et b' sont positifs, on a $k=1$ et $a=a'$ et $b=b'$. D'où l'unicité de l'écriture irréductible d'une fraction.

Définition. Dans le cas où a et b sont premiers entre eux, on dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Exemple. Les fractions $\frac{2}{3}; \frac{-12}{49}$ sont irréductibles tandis que les fractions $\frac{10}{20}; \frac{-64}{26}$ sont réductibles.

1.2 Opérations sur les rationnels

Il s'agit maintenant de pouvoir définir des règles de calcul avec les rationnels. Ces règles doivent être compatibles avec :

- les règles de calcul sur **Z**,
- le fait que si $x = \frac{a}{b}$, alors $a = bx$,
- le fait qu'on veut conserver la commutativité ($xy=yx$ et $x+y=y+x$) et l'associativité [$x(yz)=(xy)z$, et $x+(y+z)=(x+y)+z$] de la multiplication et de l'addition.

Définition. On pose : $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ et $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

Il faut vérifier que cette définition est indépendante de l'écriture fractionnaire choisie. Cette vérification est laissée au lecteur.

Proposition. Muni de ces deux opérations, l'ensemble **Q** est un corps C'est-à-dire que :

- l'addition est commutative, associative, admet un élément neutre 0 et tout élément $\dfrac{a}{b}$ admet un opposé : $-\dfrac{a}{b}$
- la multiplication est commutative, associative, admet un élément neutre 1 et tout élément non nul $\dfrac{a}{b}$ admet un inverse : $\dfrac{b}{a}$. La multiplication est distributive par rapport à l'addition c'est-à-dire que $\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{ac}{bd}+\dfrac{ae}{bf}$.

Remarque. On sait donc effectuer le quotient de deux fractions (la seconde étant non nulle)
$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

1.3 Relation d'ordre sur Q

Définition. Un nombre rationnel $\dfrac{a}{b}$ avec $a\in\mathbf{Z}$ $b\in\mathbf{N}^*$ est positif (respectivement : strictement positif) si *a* est positif (respectivement strictement positif).

Un rationnel *x* est supérieur ou égal à un rationnel *y* si la différence *y*-*x* est un rationnel positif.

Proposition. Soient deux nombres rationnels $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ $a\in\mathbf{Z}$, $c\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N}^*$, $d\in\mathbf{N}^*$, alors :

(i) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ équivaut à $ad<bc$.

(ii) $\dfrac{a}{b}\leq\dfrac{c}{d}$ équivaut à $ad\leq bc$.

Preuve. Cela résulte de l'écriture de la différence des deux fractions.

Remarques

1. La relation $\leq$ est une relation d'ordre c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
2. L'ordre est total c'est-à-dire qu'on peut toujours comparer 2 nombres rationnels.
3. Dans la pratique, pour comparer 2 nombres rationnels, il y a plusieurs méthodes : réduction au même dénominateur, application de la règle du produit en croix (proposition ci-dessus) , calcul approché du quotient.

Proposition. Muni de la relation d'ordre $\leq$, le corps **(Q,+,.)** est un corps totalement ordonné. Cela signifie que la somme de 2 nombres positifs est positive et le produit de 2 nombres positifs est positif.

Preuve. Vérification facile en utilisant les définitions du produit et de la somme de 2 fractions.

Attention : Si $x \le y$ et si z est un rationnel positif, alors $zx \le zy$ car $z(y\text{-}x)$ est positif comme produit de deux nombres positifs. Tandis que si z est un rationnel négatif, on a $zx \ge zy$ car $z(x\text{-}y)$ est le produit de deux nombres négatifs donc est positif.

Proposition.

1) L'ordre défini sur **Q** est archimédien : c'est-à-dire que pour tous nombres rationnels strictement positifs A et b, il existe un entier n tel que $nb > A$.
2) L'ordre défini sur **Q** est dense c'est-à-dire qu'il existe toujours un nombre rationnel entre deux nombre rationnels distincts quelconques.

Preuve. 1) Réduisons les deux rationnels A et b au même dénominateur en posant $A = \dfrac{p}{q}$ et $b = \dfrac{r}{q}$ $p \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$, prenons alors $n = p + 1$.

2) Soient a et b deux rationnels quelconques, alors leur moyenne $\dfrac{a+b}{2}$ est un rationnel compris entre les deux.

Proposition. Soit $x = \dfrac{a}{b}$ un rationnel. Il existe un unique entier relatif q tel que $q \le x < q+1$.

Preuve. L'entier q est le quotient de la division euclidienne de a par b.

Définition. L'entier ainsi défini s'appelle la partie entière de x (on le note $[x]$). La différence x-$[x]$ est appelée partie fractionnaire de x.

1.4 Suite convergente de rationnels

La relation d'ordre permet de définir la notion de suite convergente de rationnels, fondement de la construction de l'ensemble des nombres réels.

Définition. Soit un nombre rationnel x , une suite $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ converge vers x si :

«La différence $|x_n - x|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut à condition de prendre un indice suffisamment grand ».

Ou encore : « une fois choisi un epsilon, aussi petit soit il, on peut toujours trouver un entier N à partir duquel la différence entre x et x_n n'excède pas, en valeur absolue ε ».

Ce qui se traduit en langage symbolique par

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \ge N \Rightarrow -\varepsilon \le x - x_n \le \varepsilon \ .$$

Dans ce cas on dit aussi que la suite tend vers x ou a pour limite x.

Exemples :

1. la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \ge 1}$ converge vers 0, en effet : pour tout ε strictement positif, on est sûr d'avoir : $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ dès que $n \ge \dfrac{1}{\varepsilon}$, on peut donc prendre $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ car, pour tout n tel que $n > N$, on aura bien $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

2. la suite $\left(\dfrac{2n}{1+n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 2,

3. la suite $(n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. C'est à dire que : « une fois choisi un nombre A, aussi grand soit il, on peut toujours trouver un entier N à partir duquel x_n est plus grand que A ».

Ce qui se traduit en langage symbolique par
$\forall A>0 \quad \exists N\in\mathbb{N}^*, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad n\geq N \Rightarrow x_n \geq A$.

4. la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de limite.

II Les nombres décimaux

Introduction

Au Moyen-age, on calculait avec des rationnels écrits sous la forme d'un entier relatif suivi d'une fraction positive plus petite que 1 (appelée rompu) ; par exemple $-\dfrac{17}{3}$ s'écrivait $-6+\dfrac{1}{3}$

Avec cette écriture, les calculs étaient très compliqués, même avec notre écriture actuelle les calculs de somme de fractions sont compliqués.

Pour plus de détails sur l'histoire des nombres décimaux, on pourra consulter http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr dont est extrait ce qui suit.

> C'est au belge Simon Stevin (1548 ; 1620) qu'on attribue la découverte des nombres décimaux et ceci pour deux raisons essentielles. D'abord parce qu'il semble que *Stevin* ait conçu sa théorie indépendamment des travaux antérieurs réalisés par les savants arabes. Ensuite parce que le système de *Stevin* s'est répandu de façon très rapide et a été adopté en une dizaine d'année. L'ouvrage de référence s'intitule « La Disme ». *Stevin* l'a écrit en 1585 sous la forme d'une petite brochure de trente-six pages. Il note par exemple le nombre 89,532 :
>
> 89⓪5①3②2③
>
> L'avantage de cette écriture est d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux règles opératoires d'arithmétique utilisées sur les entiers. Une addition se pose de la manière suivante :
>
> $$\begin{array}{cccc} ⓪ & ① & ② & ③ \\ 32 & 5 & 5 & 4 \\ \underline{21} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{2} \\ 54 & 3 & 3 & 6 \end{array}$$
>
> C'est pour remédier à cette difficulté que Simon Stevin, ingénieur et mathématicien flamand (1548-1620) introduit les nombres décimaux en 1585 dans un court traité intitulé *La disme.* Ce texte destiné, selon l'auteur, « *aux astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, gavieurs, stéréométriens en général, maîtres de monnaie et à tous marchands* », contient la définition des nombres décimaux et les règles de calculs sur ces nombres.

2.1 L'ensemble D

Définition. Un nombre décimal est un nombre rationnel qui admet une écriture fractionnaire de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, $a\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres décimaux sera noté **D**. On a **N** $\subset$.**Z** $\subset$ **D** $\subset$ **Q**.

Exemples : -4,2 ; 2 ; 78,24 ; 71/8 sont des nombres décimaux tandis que 1/3 n'est pas un nombre décimal.

Remarque. L'ensemble **D** est un sous-anneau de **Q**. Cela signifie que la somme, la différence, le produit de deux décimaux sont des décimaux. En revanche, ce n'est pas un corps car, par exemple, le nombre 7 qui est un nombre décimal, n'a pas d'inverse dans **D**.

Proposition. Un nombre rationnel est décimal si et seulement si son écriture sous forme de fraction irréductible ne comporte que des puissances de 2 ou de 5 au dénominateur.

Preuve. Il faut montrer une équivalence. Soit un $x=\frac{a}{10^n}$ un nombre décimal. Alors le dénominateur $10^n=2^n5^n$ n'admet bien que des puissance de 2 et de 5 dans sa décomposition en facteurs premiers.

Réciproquement soit $x=\frac{a}{2^n5^m}$ et supposons $n\geq m$, alors $x=\frac{a.5^{n-m}}{2^n5^n}=\frac{5^{n-m}a}{10^n}$ donc x est bien un nombre décimal. Dans le cas où $n<m$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par 2^{m-n}.

Ecriture d'un nombre décimal. Soit $x=\frac{a}{10^n}$ un nombre décimal. Supposons-le positif. L'entier a s'écrit en base 10 :

$$a=\overline{a_m a_{m-1}...a_0}=a_m 10^m+a_{m-1}10^{m-1}+...+a_0 \quad \text{avec } 0\leq a_i\leq 9$$

et $$\frac{a}{10^n}=a_m 10^{m-n}+a_{m-1}10^{m-n-1}+...+a_0 10^{-n}$$

Par convention d'écriture, on décide de mettre une virgule et de noter ensuite dans l'ordre le chiffre des dixièmes puis celui des centième etc.

Ainsi $3\times10^3+2\times10^1+5+6\times10^{-2}=3025{,}06$.

Remarques.

1. Cette écriture est unique. La partie à gauche de la virgule est la partie entière.

2. Il est essentiel de noter qu'un nombre décimal n'a qu'un nombre fini de chiffres avant et après la virgule.

2.2 Opération avec les nombres décimaux

L'addition et la multiplication des nombres décimaux sont définies comme pour les nombres rationnels (puisque $\mathbf{D}\subset\mathbf{Q}$). On vérifie facilement que la somme, la différence et le produit de deux décimaux sont décimaux.

Les techniques opératoires sont simples notamment pour l'addition et la soustraction. Les calculs sont beaucoup plus simples qu'avec les fractions.

2.3 Ordre sur D

La relation d'ordre définie sur **Q** induit un ordre sur **D**. En pratique, pour comparer deux décimaux, on compare leur partie entière puis si elles sont égales le chiffre des dixièmes puis s’ils sont égaux le chiffres des centièmes, etc, c'est-à-dire qu’on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition. Soient x et y deux nombres décimaux positifs. Alors

- si $[x]>[y]$ on a $x>y$, de même si $[x]<[y]$ on a $x<y$;
- si $[x]=[y]$ soient $\overline{0,a_1a_2...a_n}$ et $\overline{0,b_1b_2...b_n}$ les écritures respectives de leur parties décimales, quitte à ajouter des 0, on peut supposer qu’ils ont le même nombre de décimales. Alors soit i le premier entier tel que $a_i \neq b_i$, alors si $a_i>b_i$ on a $x>y$, si $a_i<b_i$ on a $x<y$, si toutes les décimales sont égales entre elles, les décimaux x et y sont égaux.

Preuve. clair

Proposition. a**)** Soit x un rationnel strictement positif. Il existe un entier naturel n tel que $10^{-n}<x$

b) Soient x et y deux nombres rationnels tels que $x < y$. Alors il existe un décimal d (et même une infinité) tel que $x<d<y$.

Preuve. a) On a $x=\dfrac{a}{b}$ avec $a \geq 1$ et $b \geq 1$ donc $x \times 10^b = \dfrac{a \times 10^b}{b} \geq \dfrac{10^b}{b}$ car $a \geq 1$.

Or, pour tout entier b, on a $10^b > b$. On peut le montrer par récurrence :

C’est vrai pour b=1.

Supposons la propriété vraie pour b et montrons-la pour b+1. On a $10^b > b$, soit en multipliant par 10 qui est un nombre positif $10^{b+1} > 10b = b + 9b > b+1$.

Ainsi la propriété est vraie pour tout entier.

Finalement, on a $x \times 10^b \geq \dfrac{10^b}{b}$ >1 et $x > 10^{-b}$.

b) Soit $z=y-x$, c’est un nombre rationnel qui est strictement positif. Il existe, d’après a), un entier n tel que $10^{-n}<z$.

Comme **Q** est archimédien, on sait qu’il existe des entiers a tels que : $a10^{-n}>x$. Soit e le plus petit de ces entiers. Alors le décimal $e10^{-n}$ convient. En effet :

$(e-1)10^{-n} \leq x < e10^{-n}$ et $10^{-n} < y-x$ donc $e10^{-n} \leq 10^{-n} + x < y$

On trouve un autre décimal d’ en réappliquant la démonstration précédente entre x et d, puis une infinité en introduisant d’autres décimaux entre d et d’. Par exemple entre 12,3 et 12,4 il y a une infinité de décimaux 12,31 ; 12,312 ; 12,3123 ;…

2.4 Approximation décimale d’un nombre rationnel

Proposition. Soit $x=\dfrac{a}{b}$ un rationnel, et n un entier naturel. Il existe un unique nombre décimal $x_n = \dfrac{q_n}{10^n}$ tel que $x_n \leq x \leq x_n + \dfrac{1}{10^n}$

Preuve. On a $\dfrac{q_n}{10^n} \leq x \leq \dfrac{q_n+1}{10^n}$ soit $q_n \leq 10^n x \leq q_n + 1$ donc q_n est la partie entière de $10^n x$ ce qui prouve l’existence et l’unicité.

Définition. Le décimal x_n ainsi défini est l’approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut, tandis que x_n+10^{-n} est l’approximation décimale à 10^{-n} près par excès.

2.5 Développement décimal illimité

Proposition. Soient $x=\dfrac{a}{b}$ un nombre rationnel, n un entier naturel, $x_n=\dfrac{q_n}{10^n}$ l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut et $x_{n+1}=\dfrac{q_{n+1}}{10^{n+1}}$ l'approximation décimale x à 10^{-n-1} près par défaut, alors : $q_{n+1}=10q_n+a_{n+1},\ 0\le a_{n+1}\le 9$.

Preuve. On a vu que q_n est la partie entière de $10^n x$ ou encore le quotient de la division euclidienne de $10^n a$ par b, c'est-à-dire

$10^n a = bq_n + r_n$ donc $10^{n+1}a = bq_{n+1}+r_{n+1}=10bq_n+10r_n$

$10r_n = b(q_{n+1}-10q_n)+r_{n+1}$ comme r_n est plus petit que b

$a_{n+1} = 10q_n - q_{n+1}$; $0\le a_{n+1}\le 9$.

Remarques.

1. On a donc un moyen pratique de calculer q_{n+1} à partir de q_n, en poursuivant la division de a par b. Ceci donne également le développement décimal illimité du quotient de a par b, (si à un moment donné l'une des divisions tombe juste le développement décimal est limité. On a vu que cela se produit uniquement lorsque dans l'écriture irréductible de x le dénominateur se décompose en produit de puissance de 2 et de puissance de 5).

2. La suite ainsi construite tend vers x quand n tend vers l'infini.

Exemples.. Le développement décimal illimité de 1/3 est 0, 333…3….
Le développement décimal illimité de 13/7 est 1,857142857…

Proposition. Soit q un rationnel positif différent de 1 et n un entier, on a

$$S_n = 1+q+q^2+....+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Si q est strictement plus petit que 1, alors la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{1-q}$.

Preuve. Un calcul simple permet de vérifier la première égalité. La dernière assertion résulte du fait que q^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini dès que $|q|<1$.

Corollaire. Soient m et n des entiers tels que $1\le m+1\le n$. Alors on a

$$x=\frac{9}{10^{m+1}}+\frac{9}{10^{m+2}}+...+\frac{9}{10^n}=\frac{1}{10^m}-\frac{1}{10^n}$$

Preuve.

$$x=\frac{9}{10^{m+1}}(1+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{10^{n-m-1}})=\frac{9}{10^{m+1}}\times\frac{1-(1/10^{n-m})}{1-(1/10)}=\frac{1}{10^{m+1}}(10-\frac{1}{10^{n-m-1}})=\frac{1}{10^m}-\frac{1}{10^n}.$$

Proposition. Le développement décimal illimité d'un rationnel est « propre » c'est-à-dire que les a_i ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier n à partir duquel tous a_i sont égaux à 9. Soit $m>n$: $x_m = x_n+\dfrac{9}{10^{n+1}}+\dfrac{9}{10^{n+2}}+...+\dfrac{9}{10^m}=x_n+\dfrac{1}{10^m}-\dfrac{1}{10^n}$.

Soit $x_n + \frac{1}{10^n} = x_m + \frac{1}{10^m}$. Comme ceci est vrai pour tout m supérieur à n, en faisant tendre m vers l'infini, il vient : $x_n + \frac{1}{10^n} = x$. On trouve donc que x est décimal, mais si x est décimal son développement décimal est fini ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarque. On a 0,99…999…=1 en effet $0,\underbrace{99...9}_{n \text{ chiffres}} = 1 - \frac{1}{10^n}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Proposition. Les nombres décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement décimal illimité ne comporte qu'un nombre fini de chiffres non nuls.
Preuve. clair

Théorème. Tout nombre rationnel a un développement décimal périodique à partir d'un certain rang
Preuve. Soit un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^*$.Dans la division euclidienne de a par b il n'y a que b restes possibles (en comptant 0 et dans ce cas le nombre est décimal) donc au bout de b restes au plus, on va retrouver un reste déjà vu et la division va recommencer à l'identique.

Exemple

```
17          13
 40        |1,307692
  100
     90
    120
       30
         4
```

III. Le corps des nombres réels

3.1 Nécessité de nouveaux nombres

On appelle racine carré d'un nombre positif x l'unique nombre positif y tel que $y^2 = x$. Les racines carrées des nombres sont très utiles en géométrie, par exemple lorsqu'on applique le théorème de Pythagore. Or, ces nombres ne sont en général pas des nombres rationnels comme le montre la propriété suivante.

Proposition. Soit p un nombre entier naturel qui n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire tel qu'il n'existe pas d'entier n tel que $n^2=p$). Alors p n'admet pas non plus de racine carrée dans **Q**.
Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre rationnel positif x tel que $x^2=p$. Soit $x = \frac{a}{b}$ l'écriture irréductible fractionnaire de x. Alors, $a^2 = b^2 p$. Donc b divise a^2. Comme il est premier avec a, d'après le théorème de Gauss, il divise a. Ainsi, b divise a, il est premier avec a donc b=1 (car b est positif) et $a^2=p$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarques.

1. Cela s'applique en particulier lorsque p est premier puisqu'il ne peut être un carré parfait dans ce cas.
2. On montre sur le même principe qu'un nombre premier n'a pas de racine cubique, quatrième,… rationnelle.

Au paragraphe précédent, on a vu que les nombres rationnels admettaient un développement décimal illimité périodique. On peut très bien imaginer des nombres qui auraient un développement décimal illimité non périodique, par exemple : 0,123456789101112…

Enfin, on peut montrer que π et e ne sont pas rationnels (on le verra pour e, pour π c'est un peu plus difficile).

3.2 Définition du corps des réels

Avant de donner la définition du corps des réels, il nous faut définir la notion de suites adjacentes.

Définition. Deux suites de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes si elles satisfont aux propriétés suivantes :

a) $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante (cad $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout entier n)

b) $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante (cad $y_n \geq y_{n+1}$ pour tout entier n)

c) la différence $y_n - x_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exemples

1. Les suites de terme général $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes. En effet les conditions a) et c) sont clairement vérifiées. Reste à vérifier la décroissance de la suite (y_n). Or,

$y_n - y_{n+1} = x_n + \frac{1}{n!} - x_{n+1} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} = \frac{n-1}{(n+1)!}$ qui est positif ou nul dès que n est supérieur à 1.

2. Les suites $x_n = 0{,}1010010001....\underbrace{00..0}_{n\text{ fois}}1$ et $y_n = 0{,}1010010001....\underbrace{00..0}_{n\text{ fois}}2$ sont adjacentes. En effet les conditions a) et c) sont clairement vérifiées. Reste à vérifier la décroissance de la suite (y_n).

Or, $y_n - y_{n+1} = (2 - 1{,}\underbrace{00..0}_{n+1\text{ fois}}2)10^{-n} \geq 0$ qui est positif ou nul dès que n est supérieur à 1.

Remarques.

1. Si deux suites de rationnels (x_n) et (y_n) sont adjacentes, alors $x_n \leq y_n$ pour tout entier n. En effet, la suite $(y_n - x_n)$ est décroissante et comme elle tend vers 0, elle est positive.
2. Dans l'exemple 2, la suite (x_n) ne peut converger dans **Q** car elle converge vers un nombre qui admet un développement décimal non périodique.

Théorème. Il existe un unique corps ordonné archimédien contenant **Q** et tel que deux quelconques suites adjacentes de nombres de ce corps admettent une limite.
Preuve. La preuve de ce théorème est admise. Notez qu'il faut montrer l'existence et l'unicité. Pour l'existence on peut dire que ce corps est l'ensemble de tous les développements décimaux propres limités ou non, périodiques ou non. Il faut ensuite définir les opérations et vérifier les conditions demandées.

Définition. Ce corps est appelé corps des réels et est noté **R**.

3. 3 Propriétés du corps des réels

Proposition.

- **a)** Entre deux nombres réels a et b tels que $a<b$, il existe toujours un nombre rationnel.
- **b)** Entre deux nombres réels a et b tels que $a<b$, il existe toujours un nombre irrationnel (cad un réel non rationnel).

Preuve.
a) Si a et b sont de signe différent, 0 convient. Supposons-les positifs (s'ils sont négatifs on procède de même). Comme **R** est archimédien, il existe n tel que $n(b-a)>1$. Toujours en appliquant la propriété d'Archimède, il existe un entier m tel que $\frac{m}{n}>a$. Soit m_1 le plus petit entier satisfaisant cette propriété. Alors :
$\frac{m_1-1}{n}\leq a<\frac{m_1}{n}<\frac{m_1-1+n(b-a)}{n}=b-\left(a-\frac{m_1-1}{n}\right)\leq b$. Ainsi le rationnel $\frac{m_1}{n}$ convient.
b) On procède de la même manière en remplaçant n par $n\sqrt{2}$ dont on sait que c'est un irrationnel.

Proposition. Soit x un nombre réel. Il existe un unique entier relatif n tel que $n\leq x<n+1$. Cet entier est appelé partie entière de x.
Preuve. Comme **R** est archimédien, il existe un entier m tel que $m>x$. Soit m_1 le plus petit de ces entiers, alors m_1-1 convient.

Définition. Un intervalle I est une partie non vide de **R** telle que si a et b sont deux éléments distincts de I alors tout x compris entre a et b est un élément de I

Les intervalles de **R** sont les suivants :

$$\varnothing\,;\,]-\infty;b]\,;\,]-\infty;b[\,;\,]-\infty;+\infty[\,;\,]a;+\infty[\,;\,[a;+\infty[$$
$$]a;b[\,;\,[a;b[\,;\,]a;b]\,;\,[a;b] \quad \text{avec } a\in\mathbf{R};b\in\mathbf{R};a\leq b$$

Théorème. Tout développement décimal illimité définit bien un nombre réel.
Soit (a_i) une suite de chiffres (c'est à dire $0\leq a_i\leq 9$ pour tout entier i). Alors
$\sum_{i\in\mathbf{N}}\frac{a_i}{10^i}=a_0,a_1a_2...a_n....$ est un nombre réel.
Preuve. Il faut le définir comme limite de deux suites adjacentes. Soit $x_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{10^i}=a_0,a_1a_2...a_n$ et $y_n=x_n+\frac{1}{10^n}$. Ces deux suites sont adjacentes car les conditions a) et c) sont clairement vérifiées. Reste à vérifier la décroissance de la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Or, $y_n - y_{n+1} = 10^{-n} - (a_{n+1}+1)10^{-(n+1)} \geq 0$ car $(a_{n+1}+1) \leq 10$. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont donc convergentes dans **R** vers $\sum_{i\in\mathbf{N}} \frac{a_i}{10^i} = a_0, a_1 a_2 ... a_n ....$.

Remarque. On a vu que le développement décimal impropre 0,99..9… définissait le nombre 1.

Théorème. Approximation décimale d'un nombre réel
Soit x un nombre réel positif ou nul et n un entier naturel.

a) Il existe un unique nombre décimal $x_n = \frac{q_n}{10^n}$ tel que l'on ait $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$.
b) On a $q_{n+1} = 10q_n + a_{n+1}$ avec $0 \leq a_{n+1} \leq 9$

Définition. Le nombre x_n (resp. x_n+10^{-n}) est l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut (resp. par excès).

Preuve du Théorème.
a) L'entier q_n est la partie entière de $10^{-n}x$ ce qui montre à la fois l'existence et l'unicité.
b) On a

$$10q_n \leq 10^{n+1}x < 10q_n + 10$$

$$q_{n+1} \leq 10^{n+1}x < q_{n+1} + 1$$

soit en prenant l'opposé $-q_{n+1} - 1 < -10^{n+1}x \leq -q_{n+1}$

et en additionnant : $10q_n - q_{n+1} - 1 < 0 < 10q_n - q_{n+1} + 10$

soit : $-1 < q_{n+1} - 10q_n < 10$ ou encore : $0 \leq q_{n+1} - 10q_n \leq 9$.

Remarques.
1. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_n + 10^{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes, leur limite commune est x.
2. Le b) du théorème signifie qu'on passe de x_n à x_{n+1} en ajoutant un chiffre supplémentaire (le chiffre : a_{n+1}) après la virgule, d'où la proposition.

Proposition. Tout nombre réel admet un développement décimal limité ou non, périodique ou non.

Théorème. Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.
Preuve. Nous avons vu que tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique. Il faut montrer la réciproque.
Soit un nombre réel x admettant un développement décimal périodique. Quitte à retrancher la partie entière de x, on peut supposer $0 \leq x \leq 1$, c'est-à-dire que
$x = 0, c_0 ... c_n \underbrace{a_0 a_1 ... a_p} \underbrace{a_0 a_1 ... a_p} ... \underbrace{a_0 a_1 ... a_p} ....$ Alors $10^{n+p}x - 10^n x = a$; $a \in \mathbf{N}$.

Donc $x = \frac{a}{10^{n+p} - 10^n}$ est bien un nombre rationnel.

Théorème. Le corps des nombres réels n'est pas dénombrable. C'est-à-dire qu'il ne peut pas être en bijection avec **N** ou encore qu'on ne peut pas numéroter tous les réels.

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'on le puisse. Alors on pourrait numéroter tous les réels compris entre 0 et 1 : x_1, … x_n, … . Considérons maintenant le réel défini par le développement décimal illimité $0,a_1a_2...a_p...$ défini par :

> a_1 est un chiffre différent de 9 (pour éviter les développements impropres) et différent du premier chiffrer du développement décimal illimité de x_1 ,
> a_i est un chiffre différent de 9 et différent du ième chiffre du développement décimal illimité de x_i.

Alors x est bien différent de tous les x_i. Pourtant, c'est un réel compris entre 0 et 1. Donc il est impossible de numéroter tous les réels.

Chapitre 2

Initiation à l’analyse réelle

Initiation à l'analyse réelle

Les propriétés de **R** comme corps totalement ordonné, archimédien dans lequel les suites adjacentes sont convergentes permettent de définir les notions de continuité, dérivabilité, intégrale et primitive de fonctions

I. Fonction continue

1.1 Définition de la continuité

Définition. Une fonction définie sur un intervalle *I* de **R** dans **R** est continue en un point *x* de *I* si, intuitivement, « si *y* est voisin de *x*, alors *f*(*y*) est voisin de *f*(*x*) » ou encore « pour que *f*(*y*) soit près de *f*(*x*), il suffit que *y* soit près de *x* ». Ce qui se traduit en langage symbolique
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

On peut montrer en utilisant les définitions symboliques que cette définition est équivalente à la suivante :
Une fonction définie sur un intervalle *I* de **R** dans **R** est continue en un point *x* de *I* si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de *I* et de limite *x*, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ a pour limite *f*(*x*).

Définition. Une fonction définie sur un intervalle *I* de **R** dans **R** est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

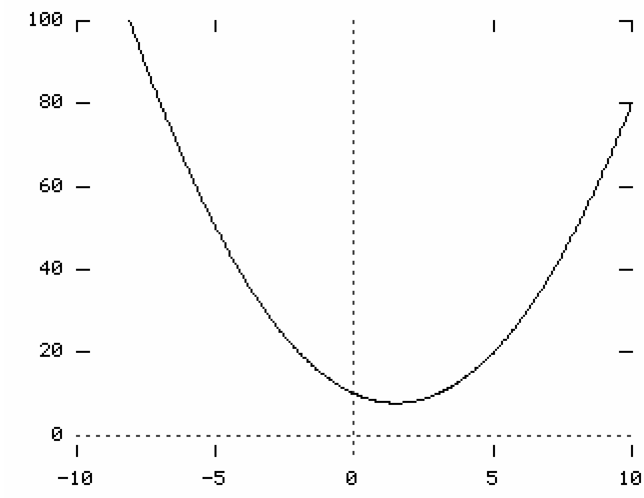
Théorèmes algébriques. La somme, le produit et le quotient si le dénominateur est non nul de deux fonctions définies et continues en un point (respectivement définies et continues sur un même intervalle *I*) sont continues en ce point (respectivement sur *I*). De même la composée de deux fonctions continues est continue.
Preuve. Elle repose sur l'écriture symbolique de la continuité**.**

Dans les cas rencontrés dans ce cours, on montrera la continuité en utilisant cette propriété et les exemples de référence du paragraphe suivant.

1.2 Exemples

1. Les fonctions polynômes sont des fonctions définies et continues en tout point de **R**.
Les fonctions polynômes sont les fonctions du type $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Le nombre *n* est un entier, c'est le degré du polynôme et les coefficients $a_n, \ldots a_0$ sont des nombres réels.
Les polynômes de degré 1 sont des applications affines, leurs représentations graphiques sont des droites.

Les polynôme de degré 2 sont des binômes du second degré leurs représentations graphiques sont des paraboles. Voici le tracé de la courbe représentative de la fonction polynôme $x^2-3x+10$



2. La fonction partie entière est définie sur **R** mais n'est continue en aucun point a de **Z**. En effet : notons E cette fonction. Alors si a est un nombre entier $E(a)=a$. Tandis que pour $n \geq 1$, $E(a\text{-}10^{-n})=a\text{-}1$.
La suite $\left(a-10^{-n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet pour limite a mais la suite $\left(E(a-10^{-n})\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet pour limite a-1 qui n'est pas $E(a)$.
3. ***Les fonctions trigonométriques,*** sinus et cosinus sont définies et continues sur **R**, la fonction tangente est définie et continue sur les intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k\in\mathbf{Z}$.

1.3 Continuité sur un intervalle Propriétés des valeurs intermédiaires

Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ et telle que $f(a)f(b)\leq 0$. Alors l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution dans $[a;b]$.
Méthode de la Preuve.: Pour fixer les idées, supposons $f(a)$ négatif et $f(b)$ positif .
a. Construire, par la méthode de dichotomie, (c'est-à-dire en divisant chaque fois l'intervalle en deux) une suite d'intervalles emboîtés $[a_n;b_n]$ inclus dans $[a;b]$, dont la longueur tend vers 0 et telle qu'on ait : $\forall n\in N;\quad f(a_n)f(b_n)\leq 0$ et $f(a_n)$ négatif et $f(b_n)$ positif . Précisément on pose $a_0=a$ et $b_0=b$, puis on regarde le signe de $f[(a+b)/2]$. Si c'est un nombre positif, alors on pose $a_1=a$ et $b_1=(a+b)/2$. En revanche si c'est un nombre négatif, on pose $a_1=(a+b)/2$ et $b_1=b$; et ainsi de suite.
b. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
c. Soit c leur limite commune. Comme la fonction f est continue les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ ont pour limite commune $f(c)$. Comme l'une est à termes positifs ou nuls et l'autre à termes négatifs ou nuls, $f(c)$ est nul.
(On utilise ici le théorème de prolongement des inégalités pour les suites convergentes Théorème. Soit u_n une suite de limite l, si pour tout n u_n est inférieur à a, alors l est inférieur ou égal à a.).

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé, borné $[a;b]$; alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$

Preuve. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on applique le théorème précédent à la fonction $x \in [a,b] \mapsto f(x) - k$

Théorème. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Preuve. Soit une fonction continue f définie sur un intervalle I. Posons $J= f(I)$. Il faut montrer que J est un intervalle. Soient $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ deux éléments de J et c un élément compris entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel d tel que $f(d)=c$ puisque f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque. Attention on n'a pas en général $f([a,b]) = [f(a); f(b)]$. Cette égalité est vraie si la fonction est croissante.
Prenons par exemple $f(x) =x^2$ et $I = [-1;2]$, alors $f(I) = [0;4]$ tandis que $[f(a) ;f(b)]=[1 ;4]$.
Pour déterminer $f(I)$ on peut, si la fonction est dérivable, étudier les variations de f comme on le verra au paragraphe suivant.

1.4 Application à la résolution d'équations

Exemple Montrer que l'équation $x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$ admet une racine positive et la déterminer à 10^{-1} près.
Réponse
Soit f la fonction définie sur **R** qui à x associe $x^3 + 2x^2 + 2x - 4$. Cette fonction est continue d'après les théorèmes algébriques.
On a, $f(0)=-4$ et $f(1)=1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur cet intervalle.
Pour déterminer une valeur approchée à 0,1 près on peut employer la méthode de dichotomie.
Les calculs suivants donnent :
$f(0{,}5)<0$ donc la racine appartient à]0,5 , 1[;
$f(0{,}75)<0$ donc la racine appartient à]0,75 , 1[;
La méthode de dichotomie conduit à déterminer le signe de $f(0{,}875)$ mais il est plus simple de chercher le signe de $f(0{,}8)$;
$f(0{,}8)<0$ donc la racine appartient à]0,8 , 1[.
La valeur cherchée est donc comprise entre 0,8 et 1 ; une valeur approchée à 0,1 près est 0,9.

II. Fonction dérivable

2.1 Dérivée d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.(et $I \neq \{x_0\}$ On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ défini sur $I \setminus \{x_0\}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 . Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Remarque. Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0. En effet, pour , posons $g(x)= \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ donc $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0)$. Quand x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ et la fonction est donc continue en x_0.

Définition. Une fonction définie sur un intervalle I de **R** dans **R** est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Interprétation géométrique

La dérivée $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe C_f représentative de la fonction f.

Pour une représentation graphique animée, consulter, par exemple
http://www.math.univ-mulhouse.fr/analyse/Derivation/Illustration/illustrations.html

Théorèmes algébriques.
La somme, de deux fonction dérivables est une fonction dérivable et
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
Le produit, de deux fonction dérivables est une fonction dérivable et
$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Le quotient si le dénominateur est non nul de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

De même la composée de deux fonctions dérivables lorsqu'elle est définie est dérivable et
$(f \circ g)'(x) = f'\left[g(x)\right]g'(x)$.
Preuve. En utilisant la définition et l'écriture symbolique de la limite

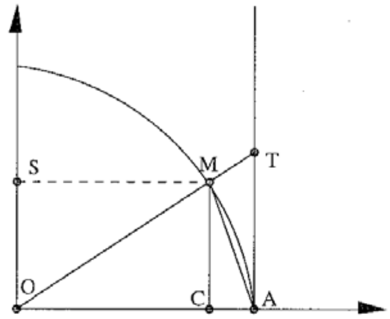
2.2 Exemples

1. *Les fonctions polynômes* sont dérivables en tout point de **R**, l'écriture de la définition montre facilement que :
Si f est constante, sa dérivée est nulle en effet $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ =0 donc sa limite est nulle quand x tend vers x_0.
Si $f(x) = x^n$avec $n \geq 1$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$; en effet, si $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)\left[x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-1}\right]}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} nx_0^{n-1}.$$

Les théorèmes algébriques permettent d'en déduire la dérivée d'un polynôme (et même d'une fraction rationnelle).
2. La fonction partie entière est dérivable et de dérivée nulle en tout point qui n'est pas un entier relatif. En effet si x_0 n'est pas entier, il existe un intervalle ouvert contenant x_0 et ne contenant pas d'entier et sur cet intervalle la fonction est constante.
Elle n'est pas dérivable en tout entier relatif car la limite à droite et à gauche quand x tend vers x_0 du taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'est pas la même.
3. Les fonctions trigonométriques, sinus et cosinus sont dérivables sur **R**, la fonction tangente est dérivable sur les intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbf{Z}$.
On a sin'(x)=cos x. ; cos'(x)=-sin x et tan'(x)= -1/cos^2(x).

Exercice. Montrer que sin'(0)=1.



Lorsqu'on était en terminale on a tous admis que la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0 est 1. La définition qu'on avait alors était la définition trigonométrique du sinus, c'est-à-dire sinus = côté opposé / hypothénuse. Par la suite on a pu démontrer cela en utilisant la dérivée de sinus en 0... qu'on avait calculée à l'aide de $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Pas très satisfaisant ! Dans cet exercice on va donner une démonstration élémentaire de la valeur de cette limite, en utilisant la trigonométrie.
Considérons le cercle trigonométrique (voir dessin). Soit M un point sur le cercle, $x > 0$ la valeur de l'angle $\widehat{AOM}$ (en radians !). Soit

C = projection de M sur l'axe des cosinus
S = projection de M sur l'axe des sinus
T = intersection de (OM) avec l'axe des tangentes.

On a donc $OS = CM = \sin x$, $OC = SM = \cos x$, $AT = \tan x$.

1. Montrez que la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à x. En la comparant à MC montrez que $\sin x \leq x$ pour $x > 0$.
2. En comparant les aires du secteur de disque AOM et du triangle AOT, montrez que $x \leq \tan x$ pour $x > 0$.
3. Déduisez-en que $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ puis $\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$.

2.3 Fonction dérivable sur un intervalle

Théorème de Rolle. Soit *f* une application de l'intervalle $[a,b]$ dans **R** vérifiant les conditions suivantes :
(i) *f* est continue sur $[a,b]$,
(ii) *f* est dérivable sur $]a,b[$,
(iii) $f(a)=f(b)$
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Méthode la Preuve. La démonstration consiste à montrer que la fonction, lorsqu'elle n'est pas constante, admet un extremum local en un point de $]a,b[$.

Théorème des accroissements finis. Soit *f* une application de l'intervalle $[a,b]$ dans **R** vérifiant les conditions suivantes :
(i) *f* est continue sur $[a,b]$,
(ii) *f* est dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$
Méthode de la Preuve. On applique le théorème de Rolle à la fonction
$\phi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
Théorème d'étude de variation d'une fonction. Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors

a. *f* est constante si et seulement si : $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$;

b. *f* est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si
$\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0 \quad$ (resp. $f'(x) \leq 0$) ;

c. f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si.

$\forall x \in I\ ,\ f'(x) > 0 \quad (\text{resp. } f'(x) < 0)$.

Preuve. utiliser le théorème des accroissements finis.

2.4 Théorème de la bijection monotone.

Théorème

(i) Une fonction f strictement croissante et continue d'un intervalle $[a,b]$ sur$[f(a),f(b)]$ est bijective de $[a,b]$ sur$[f(a),f(b)]$. On note f^{-1} la fonction réciproque.
(ii) De plus, la fonction réciproque est également continue.
(iii) Enfin, si de plus, f est dérivable alors la réciproque est dérivable et

$$\left(f^{-1}\right)'(d) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(d)\right]}.$$

Remarque. Comme f est strictement monotone, la fonction dérivée f'ne s'annule pas et la fonction dérivée de la réciproque $(f^{-1})'$est bien définie.

Preuve.

(i) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur d de $[f(a),f(b)]$ est l'image d'au moins une valeur c de $[a,b]$.
Comme la fonction est strictement croissante, il existe une et une seule valeur c telle que $f(c)=d$.
(ii) Nous admettons ce point qui repose sur l'écriture symbolique de la limite.
(iii) Il faut regarder si le taux d'accroissement $\dfrac{f^{-1}(d)-f^{-1}(y)}{d-y}$ admet une limite quand y tend vers d. Posons $f^{-1}(y)=x$ et $f^{-1}(d)=c$. Alors, comme la fonction f^{-1} est continue, quand y tend vers d , x tend vers c et $\dfrac{f^{-1}(d)-f^{-1}(y)}{d-y} = \dfrac{c-x}{f(c)-f(x)} = \dfrac{1}{\left[f(c)-f(x)\right]/(c-x)}$.
La limite de cette expression
quand y tend vers d est $\dfrac{1}{f'(c)} = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(d)\right]}$.

Application. Reprenons l'équation étudiée en (1.4) : $x^3+2x^2+2x-4=0$.
Faisons l'étude des variations de la fonction f qui à x associe x^3+2x^2+2x-4
On a $f'(x)=3x^2+4x+2$.
Cherchons les zéros de la dérivée. Il s'agit de résoudre une équation du second degré dont le discriminant est 16-24<0. Il n'y a donc pas de racine réelle, le discriminant garde donc toujours le même signe. Ce signe est le signe positif.
La dérivée est donc strictement positive. La fonction f étant continue et strictement croissante elle est donc bijective.
On a vu qu'elle s'annulait une fois au paragraphe 1.4.
L'équation admet dons une racine unique. Une valeur approchée à 0,1 près a été calculée au paragraphe 1.4 par la méthode de dichotomie, c'est 0,9.

III Fonction primitive

3.1 Primitive d'une fonction

Définition. Soit f une application d'un intervalle I dans **R**, une primitive de f est une fonction dérivable F telle que $F' = f$.

Exemple. Une primitive de la fonction constante f définie par $f(x)=a$ est la fonction F définie par $F(x)=ax$.

Remarque. Une primitive d'une fonction donnée n'est pas unique. En effet si F est une primitive de f alors la fonction G définie par $G(x)=F(x)+$ *constante* est aussi une primitive de f.

Théorème. Toute fonction continue f définie sur $[a, b]$ admet une primitive sur $[a, b]$.
Preuve. La preuve de ce théorème essentiel est admise car elle repose sur la définition de l'intégrale de Riemann qui est hors du programme de ce cours.
Nous verrons au chapitre suivant une interprétation géométrique

3.2 Primitives usuelles

Fonctions f	primitives de f	Intervalles de définition
$x \mapsto x^a$, $a \in \mathbf{R}$ et $a \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + k$, $k \in \mathbf{R}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$, $k \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$, $k \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k$, $k \in \mathbf{R}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+t\pi; \dfrac{\pi}{2}+t\pi\right[$, $t \in \mathbf{Z}$

IV La fonction logarithme

4.1 Définition de la fonction logarithme

Définition. La fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ et admet alors des primitives sur $]0 ; +\infty[$. La fonction logarithme népérien, (notée ln), est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$ et qui s'annule en 1.

On a donc $\forall u \in]0,+\infty[$; $\ln u = \displaystyle\int_1^u \frac{dt}{t}$.

Conséquences

- $\ln 1 = 0$, $\forall u \in]0,1[\quad \ln u < 0$, $\forall u \in]1,+\infty[\quad \ln u > 0$
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

• On peut donner un premier encadrement de ln t, par exemple : $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$.

Car $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$ or, si $1 \leq t \leq 2$ on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{t} \leq 1$. Donc, d'après la propriété de croissance de l'intégrale il vient : $\int_1^2 \frac{1}{2} dt \leq \int_1^2 \frac{dt}{t} \leq \int_1^2 dt$ soit $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$.

4.2 Propriété algébrique

Propriété : Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$.

Preuve. Par définition, $\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t}$.

D'après la relation de Chasles $\int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \ln a + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$.

Le changement de variable $t=ua$ dans la seconde intégrale donne $\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{b} \frac{du}{u} = \ln b$.

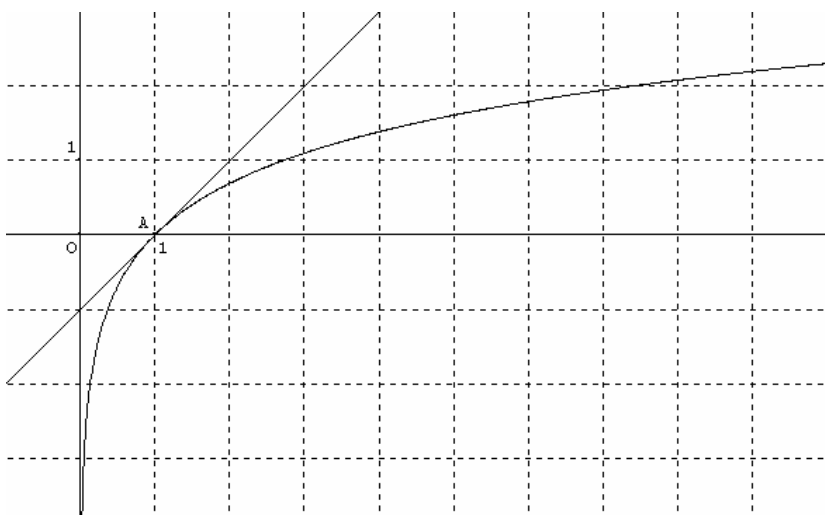
Finalement, on a bien, $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$.

Conséquences. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Proposition. On a : $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \ln u = -\infty$

Preuve.
On a vu que la fonction logarithme est strictement croissante. Il suffit donc de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ tels que $(\ln x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende également vers $+\infty$.
Prenons $x_n = 2^n$, alors $\ln(x_n)= n\ln(2)$ qui tend bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La seconde limite s'obtient à partir de la première en posant $u=1/x$.

4.3 Courbe représentative de la fonction ln



4.4 La fonction exponentielle

Définition. La fonction logarithme étant continue et strictement croissante de]0 ; +∞[.dans **R**, elle est donc bijective d'après le théorème de la bijection monotone. On appelle exponentielle son application réciproque. C'est-à-dire que $\forall x \in \mathbf{R}$ **,** $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$.

Propriétés. (i) La fonction exponentielle est continue et dérivable et exp'(x)=exp(x).

(ii) On a $\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall y \in \mathbf{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$.

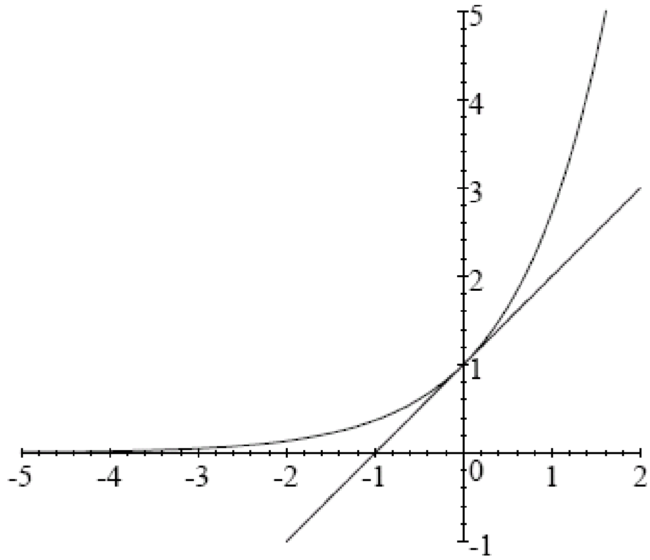
Preuve.

(i) D'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction exponentielle est continue, dérivable et $\exp'(y) = \dfrac{1}{\ln'\left[\exp(y)\right]} = \exp(y)$.

(ii) Soient x et y fixés, posons a=exp(x) et b= exp(y), c'est-à-dire ln a=x et ln b= y.

Alors, $\exp(x+y) = \exp\left[\ln a + \ln b\right] = \exp\left[\ln\left(a.b\right)\right] = a.b = \exp(x).\exp(y)$.

Courbe représentative de la fonction exponentielle



4.5 Complément au tableau des primitives usuelles

Fonctions f	Primitives de f	Intervalles de définition
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + k$, $k \in \mathbf{R}$	$]-\infty;0[\,;\,]0;+\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + k$, $k \in \mathbf{R}$	**R**
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \ln\left(\lvert\cos x\rvert\right) + k$, $k \in \mathbf{R}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+t\pi;\dfrac{\pi}{2}+t\pi\right[$, $t \in \mathbf{Z}$

Chapitre 3

Notions de longueur, d’aire et de volume

Notions de longueur, d’aire et de volume

Introduction

Une grandeur est une caractéristique intrinsèque d’un objet, par exemple ses dimensions, sa masse, sa température. Les nombres réels permettent de mesurer ces grandeurs.
Certaines grandeurs sont additives comme la masse, d’autres ne le sont pas comme la température :

- la masse de la réunion de deux solides disjoints est la somme de leur masse,
- la température de la réunion de deux solides disjoints n’est pas la somme de leur température.

Ce chapitre traite des dimensions : longueur, aire et volume d’objets géométriques dans le plan ou l’espace affine euclidien. Ces notions sont difficiles, les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- montrer les analogies dans la construction des mesures de ces trois grandeurs,
- faire ressortir les difficultés théoriques,
- permettre de manipuler ces notions dans des situations simples de la vie courante.

Dans les trois cas concernés, nous posons la définition suivante d’une mesure. Une mesure est une application μ d’un ensemble, dit ensemble des parties mesurables, de parties du plan (ou de l’espace) dans $\mathbf{R}^+$ telle que

a) on définit une unité c'est-à-dire un objet dont la mesure est 1,
b) μ est simplement additive, c'est-à-dire que si A et B sont deux parties disjointes $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
c) μ est invariante par isométrie, c'est-à-dire que si S est une partie mesurable et si g est une isométrie $\mu(g(S)) = \mu(S)$,
d) une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

I Notion de longueur

Dans tout ce paragraphe on se place dans un plan affine euclidien muni d’un repère orthonormé (O, i, j).

1.1 Longueur d’un segment, d’une ligne polygonale

On a supposé qu’il existait une mesure de la ***longueur d’un segment*** AB par $l(AB) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
On note souvent AB pour $l(AB)$.

Par additivité, on définit ***la longueur d’une ligne polygonale*** $\mathscr{L}=(A_0\,;A_1\,;\ldots\,;A_n)$ par

$$l(\mathscr{L}) = \sum_{i=0}^{n-1} l(A_i A_{i+1}) .$$

Propriété. La longueur satisfait aux propriétés énoncées dans l'introduction. Plus précisément :

(i) la longueur est additive,

(ii) la longueur est invariante par isométrie,

(iii) si h est une homothétie de rapport k et $\mathscr{L}$ une ligne polygonale alors

$$\mathrm{l}(h(\mathscr{L})) = |k|\,\mathrm{l}(\mathscr{L})$$

Preuve. (i) C'est la définition

(ii) et (iii) Les isométries vectorielles et les homothéties vectorielles sont des applications linéaires (cad que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(kx)=kf(x)$) la propriété étant vraie pour la longueur d'un segment, elle l'est aussi pour une ligne polygonale.

1.2 Vers la définition de la longueur d'une courbe

Il faut d'abord définir la notion de courbe, cette définition n'est pas simple. Par exemple si on prend comme définition la courbe représentative d'une fonction f « Une courbe est un ensemble de points M de coordonnées $(x, f(x))$, x variant dans un intervalle borné I et f étant une fonction continue définie de I dans **R**. » on élimine le cercle et plus généralement toute courbe admettant deux points de même abscisse et d'ordonnée différente.

Nous posons la définition suivante qui correspond à la notion de courbe paramétrée.

Définition. : Une courbe plane est un ensemble de points $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$, t variant dans un intervalle I et f et g étant deux fonctions continues définies de I dans **R**.

Exemple. Le cercle de centre O et de rayon 1 est défini de la manière suivante :
$C(O,1) = \left\{ M(\cos t, \sin t); t \in [0; 2\pi] \right\}$.

Soit une courbe C. Une ligne polygonale $\mathscr{L} = (A_0 ; A_1 ; \dots ; A_n)$ est dite inscrite dans C si chaque sommet A_i est un point de C c'est-à-dire que $A_i = M(t_i)$ et que les t_i sont rangés par ordre strictement croissant : [$t_0 < t_1 < .... < t_n$ et $\forall i \in \{0;1;...;n\}$, $t_i \in I$]
Le pas de cette ligne est la plus grande des longueurs A_iA_{i+1}.

Définition. On appelle longueur d'une courbe C la limite, quand elle existe, des longueurs des lignes polygonales inscrites dans C, lorsque le pas tend vers 0.

Remarques.
1. Bien qu'intuitive, cette définition est difficile car elle fait appel à une limite sur un ensemble très grand : celui de toutes les lignes polygonales inscrite dans C.
2. Le théorème de Pythagore montre que lorsqu'on augmente le nombre de points de la ligne polygonale, sa longueur augmente.
3. On peut montrer que cette limite existe dès lors que l'intervalle I est borné et que les fonctions f et g sont de classe C^1.

Proposition. La longueur d'une courbe ainsi définie satisfait aux propriétés énoncées dans l'introduction. Plus précisément :

(i) la longueur est additive,

(ii) la longueur est invariante par isométrie,

(iii) si h est une homothétie de rapport k et C une courbe alors $l(h(C)) = |k|\, l(C)$.

Preuve. Ces propriétés étant vraies pour les lignes polygonales, par passage à la limite, elles sont également vraies pour les courbes fermées.

II Notion d'aire

Il y a, très schématiquement, trois étapes historiques principales dans la construction de la notion d'aire :

- la géométrie des grecs avec les problèmes agraires de partage de terrain,
- le XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec l'introduction du calcul différentiel et intégral
- le XIX $^{\text{ème}}$ avec la notion de mesure.

Dans tout ce paragraphe on se place dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (O, i, j).

2.1 Définition.

On considère une partie S, bornée c'est-à-dire qui peut tenir dans un carré ou un cercle et on souhaite définir son aire c'est-à-dire intuitivement la place occupée par S dans le plan. Pour cela on a besoin d'une unité U et on veut attribuer à S un nombre qui représentera son aire, c'est-à-dire intuitivement le nombre d'unités U contenues dans S, bien sûr ce nombre n'est pas nécessairement entier.

Définition. Etant donné un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (O, i, j), une mesure d'aire est une application μ d'un ensemble Q de parties du plan dans $\mathbf{R}^+$ telle que

a) C est le carré unité construit dans le repère (O, i, j), C est dans Q et $\mu(C)=1$;
b) μ est simplement additive, c'est-à-dire que si A et B sont deux parties disjointes $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
c) μ est invariante par isométrie (symétrie orthogonale, translation, rotation), c'est-à-dire que si S est dans Q et si g est une isométrie $\mu(g(S)) = \mu(S)$;
d) Si S est dans Q et si h est une homothétie de rapport k, $\mu(h(S)) = k^2\mu(S)$.

Remarques.

1. Les parties dont on peut calculer l'aire c'est-à-dire les éléments de Q sont dites parties quarrables. Toute partie n'est pas quarrable, par exemple le plan tout entier n'a pas une aire finie.

2. D'après b) on voit que si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. Les axiomes b) et c) signifient que l'aire est invariante par découpage et recollement ce qui justifie le travail sur les aires à l'école primaire.

4. L'axiome d) est une conséquence des précédents, on peut en tout cas le montrer pour les carrés, par exemple en recouvrant un carré de côté 2 par 4 carrés unité.

5. Il reste quelques questions : une telle mesure existe-t-elle ? Est-elle unique ? Qu'est-ce que l'ensemble Q ? Les réponses à ces questions sont subtiles et les démonstrations difficiles. Nous admettons qu'une telle mesure existe pour toute partie bornée du plan, de plus elle est unique sur l'ensemble des parties quarrables. Ces parties A sont celles pour lesquelles il existe deux suites de polygones P_n et Q_n tels que $P_n \subset A \subset Q_n$ et $\mu(Q_n) - \mu(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(On verra en 2.5 l'exemple, sur ce principe, du calcul de l'aire du disque par Archimède).

Proposition.
1) Les points et les segments ont une aire nulle
2) Soient A et B deux parties presque disjointes c'est-à-dire telles que leur intersection ne contient qu'un nombre fini de segments ou de points, alors : $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$.

Preuve.

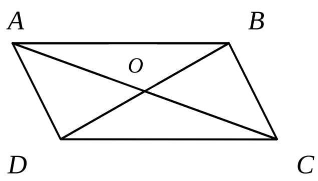
1) Soit un point A et h l'homothétie de centre A et de rapport k non nul. Alors d'après d) $\mu(h(A)) = k^2\mu(A)$ or $h(A) = A$ donc $\mu((A)) = k^2\mu(A)$ et finalement $\mu(A) = 0$.
   Soit un segment $[AB]$, de milieu M. Par l'homothétie de centre A et de rapport 2 : $\mu([AB]) = 4\,\mu([AM])$, tandis que par symétrie de centre M, $\mu([AM]) = \mu([BM])$, et par additivité $\mu([AB]) = \mu([AM]) + \mu(]MB]) = \mu([AM]) + \mu([MB]) = 2\,\mu([AM])$.
   Finalement $\mu([AB]) = 4\,\mu([AM]) = 2\,\mu([AM])$ et $\mu([AM]) = 0 = \mu([AB])$.
2) On a : $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$ car $\mu(A\cap B)=0$.

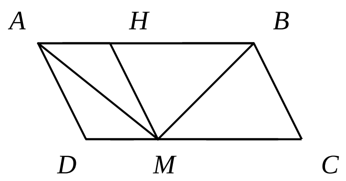
22. Propriétés de découpage

Propriété de découpage du parallélogramme.

1) Soit $ABCD$ un parallélogramme, la diagonale $[AC]$ (respectivement $[BD]$) partage le parallélogramme en 2 triangles de même aire.
2) Soit $ABCD$ parallélogramme et M un point de $[CD]$, alors l'aire du triangle AMB est la moitié de l'aire du parallélogramme.

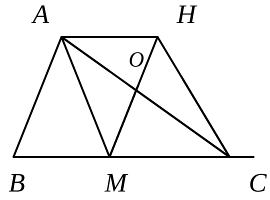
Preuve.





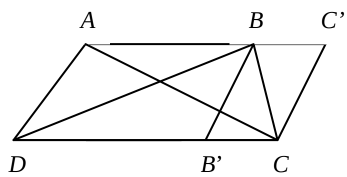
1) Soit O l'intersection des diagonales, la symétrie de centre O transforme le triangle ABD en le triangle CDB, ils ont même aire. Par ailleurs, comme ils sont disjoints et que leur réunion est le parallélogramme tout entier, on a bien $\mu(ABCD)=2\mu(ABD)=2\mu(CBD)$.
2) Soit H le point de $[AB]$ tel que $AHMD$ est un parallélogramme, on applique le 1) à chacun des parallélogrammes $AHMD$ et $HBCM$.

Propriété de découpage du triangle.
Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$, la médiane AM partage le triangle en deux triangles de même aire.
Preuve.



Soit H le point d'intersection de la parallèle à (BC) menée par A et de la parallèle (AM) menée par C. Le quadrilatère $AHCM$ est un parallélogramme donc les diagonales se coupent en leur milieu. D'après le théorème des milieux MO est parallèle à AB donc $AHMB$ est un parallélogramme. Les deux parallélogrammes $AHCM$ et $AHMB$ ont même aire, le double de celle de AMH. Donc les deux triangles ABM et AMC ont aussi même aire (la moitié de celle des parallélogrammes)

Propriété de découpage du trapèze.
Soit $ABCD$ un trapèze, alors les deux triangles ADC et DBC ont même aire
Preuve.



Soient B' tel que $ABB'D$ soit un parallélogramme et C' tel que $BC'CB'$ soit aussi un parallélogramme.
Le triangle ADC a pour aire la moitié de $\mu(AC'CD)$.
Le triangle BCD a pour aire la moitié de $\mu(ABB'D)$ plus la moitié de $\mu(BC'CB')$ soit finalement la moitié de celle du grand parallélogramme.
Les aires des 2 triangles sont donc égales.

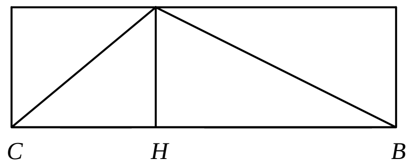
23 Formules simples de calculs d'aire

Proposition.
1) L'aire d'un carré de côté a est a^2.
2) L'aire d'un rectangle de côtés a et b est ab
3) L'aire d'un triangle est « base fois hauteur divisé par 2 ».
4) L'aire du trapèze est la demi-somme des bases multipliée par la hauteur.

Preuve.
1) Par isométrie on peut se ramener au cas d'un carré ayant deux des côtés sur les axes de coordonnées et O pour sommet. Par homothétie de centre O et de rapport a, l'aire de carré est a^2 fois celle du carré unité d'où le résultat.

2) Par isométrie on peut se ramener au cas d'un rectangle ayant deux des côtés sur les axes de coordonnées et O pour sommet. Par homothétie de centre O et de rapport a, on peut se ramener au cas d'un rectangle $OBCD$ de côté 1 et b/a avec B de coordonnées (1,0), $C(1, b/a)$et $D(0, b/a)$ dont il s'agit maintenant de montrer que l'aire vaut b/a.
Si b/a est un nombre rationnel, par recollement on montre que a fois ce rectangle a pour aire b et donc que ce rectangle a bien pour aire b/a.
Si b/a est un nombre irrationnel, soit x_n la suite de ses approximations décimales à 10^{-n} près. On considère les rectangles suivants,. OBC_nD_n avec $C_n(1, x_n)$et $D_n(0, x_n)$ et $OBC'_nD'_n$ avec $C'_n(1, x_n+10^{-n})$et $D'_n\ (0, x_n+10^{-n})$
Alors $\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \leq \mu(OBCD) \leq x_n + 10^{-n}$, en faisant tendre n vers l'infini il vient $\mu(OBCD) = a/b$.

3) On distingue 2 cas, suivant que le pied de la hauteur H est sur le segment [BC] de la base (figure 1) ou non (figure 2).
Le cas 1 est clair. Pour le cas 2, l'aire de ABC est AHC moins celle de AHB .



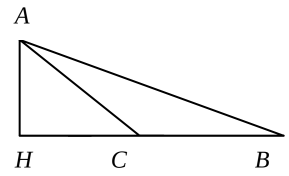
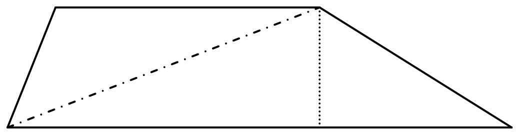


Figure 1

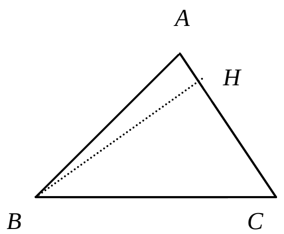
Figure 2

4) On découpe le trapèze en 2 triangles en traçant une diagonale



Proposition. Soit un triangle ABC , alors $\mu(ABC) = \dfrac{AB.AC \sin \widehat{A}}{2}$

Preuve.



La définition du sinus dans le triangle rectangle ABH donne $\sin \widehat{A} = \dfrac{BH}{AB}$.

Ainsi $\mu(ABC) = \dfrac{AB.AC.\sin \widehat{A}}{2}$

24 Calcul de l'aire d'une portion de plan comprise entre l'axe des abscisses et une courbe

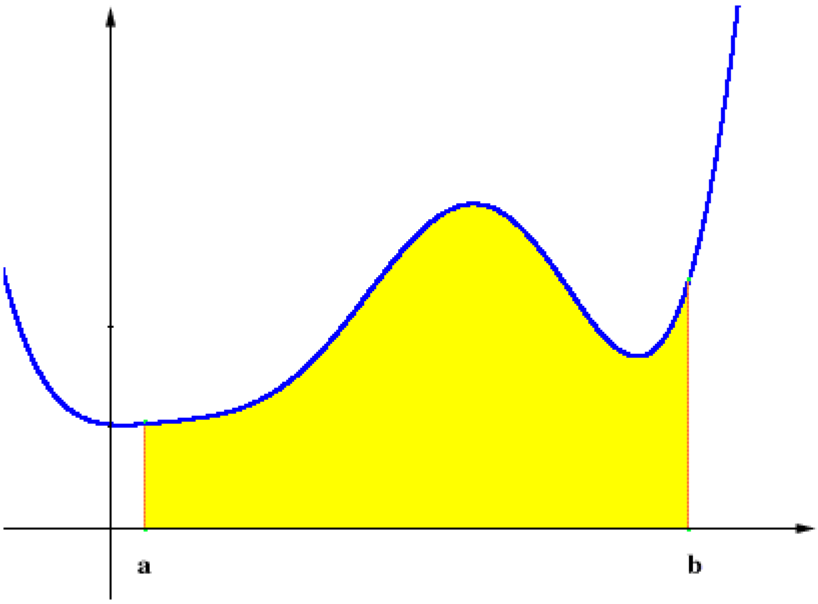
Rappel Théorème. Toute fonction continue f définie sur [a b] admet une primitive sur [a b].

Preuve. Nous démontrons ce théorème dans le cas particulier où la fonction f est monotone ; supposons la croissante (quitte à changer f en $-f$) et positive (quitte à ajouter une constante) .
Soit x un élément de l'intervalle [a b] et $S(x)$ la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites $X = a$, $X = x$ et le graphe de la fonction f.
Nous admettons que $S(x)$ admet une aire que l'on note $F(x)$.
Alors $F(x)$ est une primitive de f. En effet $F(x+h)$- $F(x)$ représente l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des x, les droites $X = x$, $X = x+h$ et le graphe de la fonction f. Cette aire est comprise entre celle des deux rectangles. Donc :

$hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$ et $f(x) \leq \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h)$

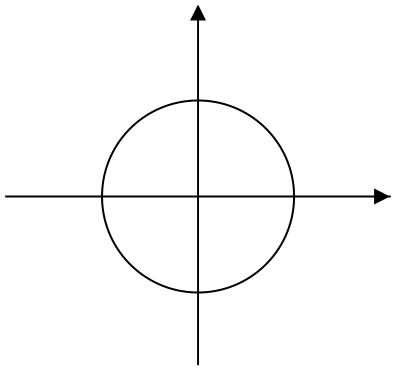
Quand h tend vers 0 le taux d'accroissement $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ tend vers $f(x)$. Ainsi $F(x)$ est bien une primitive de f.

Remarques.
1 On a donc non seulement montré l'existence d'une primitive (la preuve n'a été faite que dans le cas particulier d'une fonction monotone) mais aussi donné un sens à cette primitive : c'est la valeur de l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites $X = a$, $X = x$ et le graphe de la fonction f. Comme le montre la figure ci-dessous, pour une animation, on pourra consulter :
ttp://www.uel-pcsm.education.fr/consultation/reference/mathematiques/integration/index.htm
dont est extraite la figure ci-dessous.



Application.
Proposition. L'aire d'un disque de rayon r est πr^2

Preuve. Nous donnons une preuve utilisant le calcul des primitives, nous donnerons au paragraphe suivant la preuve utilisée par les géomètres grecs qui ne connaissaient pas le calcul différentiel.
Par translation puis homothétie de centre O et de rapport $1/r$, il suffit de calculer l'aire du disque de rayon 1 et de centre O. On calcule l'aire d'un quart de disque comme étant l'aire de portion de plan comprise entre l'axe des x, les droites d'équation $x = 0$, $x =1$ et la courbe arc de cercle.



L'équation du quart de cercle est : $x^2+y^2=1 \quad 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1$.

soit $0\le x\le 1 \quad y=\sqrt{1-x^2}$

Donc l'aire du quart de cercle est $A=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du$ en posant $x=\sin u$.

$$A=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2u+1}{2}du=\left[\frac{\sin 2u}{4}+\frac{u}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

Finalement l'aire du cercle tout entier est bien π.

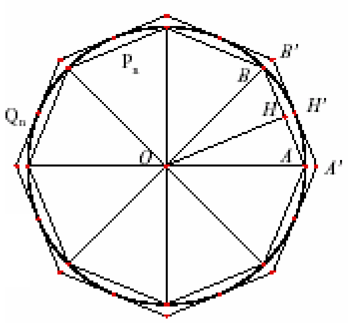
25 Calcul de l'aire du disque par Archimède

Le calcul de l'aire d'un cercle était connu par les géomètres grecs. Pour la calculer Archimède procédait par la méthode d'exhaustion.

Un cercle de rayon 1 a pour périmètre 2π, c'est la définition du nombre π.

Proposition. L'aire d'un disque de rayon r est πr^2.

Preuve. On montre que l'aire du cercle de centre O et de rayon 1 est π. Par homothétie et translation on obtiendra le résultat général.



Soit P_n un polygone régulier à n côtés inscrit dans le disque de rayon 1 et p_n son périmètre. Et soit Qn un polygone régulier à n côtés circonscrit dans le disque de rayon 1 et q_n son périmètre. Circonscrit signifie que le point H' pied de la hauteur du triangle $OA'B'$ est sur le cercle.

On a $\mu(P_n)\le\mu(D)\le\mu(Q_n)$.

L'aire du polygone P_n est n fois celle du triangle AOB. Or $\mu(OAB)=\dfrac{OH.AB}{2}$ et $\mu(P_n)=\dfrac{nAB.OH}{2}=\dfrac{p_nOH}{2}$. On a, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAH $OH^2+\left(\dfrac{p_n}{2n}\right)^2=OA^2=1$. Quand n tend vers l'infini, OH^2 tend vers 1 et $\mu(P_n)$ a même limite que $p_n/2$, c'est-à-dire π.

Le polygone Q_n est obtenu à partir du polygone P_n par une homothétie de centre O et de rapport OH'/OH soit $1/OH$. Quand n tend vers l'infini le rapport tend vers 1 et les aires des deux polygones ont même limite.

D'après le théorème des gendarmes, l'aire du disque de rayon 1 est donc π.

III Notion de volume

Dans tout ce paragraphe on se place dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé (O, *i*, *j*,*k*).

31 Quelques solides classiques

Un *parallélépipède* est l'intersection de 6 demi-espaces limités par 6 plans 2 à 2 parallèles.
Un parallélépipède a 6 faces, ces faces sont des parallélogrammes, il a aussi 8 sommets

Un *parallélépipède* est r*ectangle* lorsque les plans non parallèles qui le définissent sont perpendiculaires, ses faces sont alors des rectangles.

Un parallélépipède est un *cube* si ses faces sont des carrés.

Un *prisme* est le solide obtenu de la manière suivante. Soit un polygone $(A_1,...A_n)$ situé dans un plan *P* et un vecteur *u* n'appartenant pas à la direction de *P*, le prisme est l'ensemble des points formé par le polygone et tous ses translatés de vecteurs *ku* avec *k* compris entre 0 et 1.

Un *cylindre* est le solide obtenu de la manière suivante. Soit une surface plane *S* délimitée par une ligne courbe fermée située dans un plan *P* et un vecteur *u* n'appartenant pas à la direction de *P*, le cylindre est l'ensemble des points formé par la courbe et tous ses translatés de vecteurs *ku* avec *k* compris entre 0 et 1.

La *hauteur d'un prisme ou d'un cylindre* est la distance entre les plans *P* et et $t_u(P)$.

Le *prisme* ou le *cylindre* sont dits *droits* lorsque le vecteur de translation *u* est perpendiculaire au plan P.

Un *cône* est le solide obtenu de la manière suivante. Soit une surface plane *S* délimitée par une ligne courbe fermée située dans un plan *P* et un point *A* n'appartenant pas à *P*, le cône est l'ensemble des points formé par la courbe et toutes les images de *C* obtenues par homothéties de centre *A* et de rapport *k* avec *k* compris entre 0 et 1.
La surface *S* est la base du cône.
Lorsque *S* est un disque de centre Ω et que la droite $(A,\ \Omega)$ est perpendiculaire au plan du disque, le cône est appelé cône de révolution.

Une *pyramide* est le solide obtenu de la manière suivante. Soit un polygone situé dans un plan *P* et un point *S* n'appartenant pas *P*, la pyramide est l'ensemble des points formé par le polygone et toutes ses images obtenues par homothéties de centre *S* et de rapport *k* avec *k* compris entre 0 et 1.
Le polygone est la base de la pyramide, un *tétraèdre* est une pyramide à base triangulaire.

Pour des images de différents solides on pourra consulter
http://mathpichette.com/documents/gsss.htm.
Ou encore http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/platon.htm

3 2 Notion de volume

La construction de la mesure d'un volume est analogue à celle de la mesure d'une aire.

Définition. Etant donné un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé (O, *i*, *j*,*k*), une mesure de volume est une application *v* d'un ensemble *Q* de parties de l'espace dans $\mathbf{R}^+$ telle que

a)si *C* est le cube unité construit dans le repère (O, *i*, *j*, *k*), *C* est dans *Q* et $v(C)=1$;

b) *v* est simplement additive, c'est-à-dire que si *A* et *B* sont deux parties disjointes
$v(A \cup B) = v(A) + v(B)$;

c) *v* est invariante par isométrie (symétrie orthogonale, symétrie glissée, translation, rotation), c'est-à-dire que si *S* est dans *Q* et si *g* est une isométrie $v(g(S) = v(S)$;

d) Si *S* est dans *Q* et si *h* est une homothétie de rapport *k*, $v(h(S) = |k|^3 v(S)$.

3.3 Calculs de volume, formulaire

Proposition.

1) Le volume d'un cube de côté *a* est a^3
2) Le volume d'un parallélépipède rectangle de côtés *a*, *b*, *c* est *abc*.
3) Le volume d'un parallélépipède quelconque, d'un cylindre ou d'un prisme est « base fois hauteur ».
4) Le volume du cône ou d'une pyramide est « un tiers de base par hauteur ».
5) Le volume d'une boule de rayon *r* est $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Commentaires sur la Preuve.

Ces formules sont admises nous donnons quelques indications sur la manière et la difficulté à les établir

1) Le résultat s'obtient par homothétie de rapport *a* et par translation pour se ramener au cube unité.
2) Comme dans le cas de l'aire du rectangle, on démontre le résultat pour des valeurs rationnelles de *a*, *b*, et *c* , puis, pour le cas général, on approche les valeurs de *a*, *b*, et *c* par des décimaux et on passe à la limite.
3) Les formules s'obtiennent par découpage et recollement cependant ces découpages sont plus difficiles à se représenter que dans le plan.
4) Les formules s'obtiennent par un calcul d'intégrales multiples que nous n'effectuons et ne justifions pas.

3.4 Compléments sur les polyèdres

Ce paragraphe ne comporte pas de démonstration mais donne quelques éléments de culture mathématique.

Définition

1 On appelle ***polyèdre convexe*** un solide (plein) *P* vérifiant les propriétés suivantes :

a) *P* est intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, limités par des plans H_1, ..,H_n ;

b) *P* est borné ;

c) *P* n'est pas contenu dans un plan.

2 Les ***faces*** d'un polyèdre convexe sont les intersections de *P* avec les plans frontières H_i.
Leur réunion est la frontière de *P*.

3. Les faces sont des polygones plans convexes dont les côtés sont les ***arêtes*** du polyèdre et dont les sommets sont les **sommets** du polyèdre.

Exemples. Un cylindre, un cône, une boule ne sont pas des polyèdres, tandis que tous les autres solides cités en 3.1 sont des polyèdres.

Un résultat fondamental concernant les polyèdres convexes est le suivant
Proposition. Formule d'Euler : Soit P un polyèdre convexe, s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces, alors s-a+f=2

Exercices Vérifier cette formule pour un cube, un parallélépipède, une pyramide à base carrée et un tétraèdre.

Définition. Un ***polyèdre régulier*** est un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques et tels qu'en chaque sommet aboutit le même nombre de face. (Un polygone régulier a tous ses côtés isométriques et tous ses angles sont de même mesure).

Euclide termina son oeuvre *Les Eléments* en prouvant qu'il existe exactement 5 polyèdres convexes réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ces solides sont appelés communément ***solides de Platon*** en raison de ses travaux. Les grecs ont accordé une signification mystique aux cinq solides réguliers en les rattachant aux grandes entités qui selon eux façonnaient le monde : le feu est associé au tétraèdre, l'air à l'octaèdre, la terre au cube, l'univers au dodécaèdre et l'eau à l'icosaèdre.

Chapitre 4

Statistiques de la vie courante

Statistiques de la vie courante

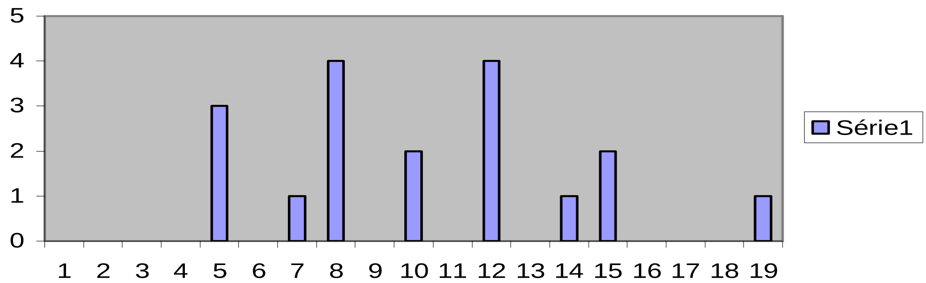
I. Série statistique à une variable quantitative discrète

Dans cette partie, on considère une série statistique à une variable quantitative et discrète. C'est-à-dire que n individus d'une population sont repérés par leur valeur sur un caractère. C'est donc la donnée de n valeurs distinctes ou non : $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$.

Exemple : La note d'examen de chacun des membres d'un groupe d'élèves :
5 ;5 ;5 ;7 ;8 ;8 ;8 ;8 ;10 ;10 ; 12 ;12 ;12 ;12 ; 14 ;15 ;15 ;19.

1.1 Représentation graphique de la série statistique

La série statistique peut être représentée par un diagramme en bâtons.



En abscisse figurent les notes et en ordonnée le nombre de fois où la note est obtenue

1.2 Caractéristiques de valeur centrale

Le mode est une valeur qui a l'effectif le plus élevé.
Dans l'*exemple* considéré il y a 2 modes : 8 et 12 puisque ces valeurs apparaissent 4 fois dans la série statistique. On dit qu'il s'agit d'une distribution bi-modale.

Une médiane est une valeur m telle que au moins la moitié des valeurs x_i sont supérieures ou égales à m et au moins la moitié des valeurs x_i sont inférieures ou égales à m.
Si n est pair, la médiane peut ne pas être unique, c'est toute valeur comprise entre $x_{n/2}$ et $x_{(1+n/2)}$.
Si n est impair, la médiane est unique et vaut $x_{(n+1)/2}$.
Dans l'*exemple* considéré 10 est l'unique valeur médiane en effet il y a un nombre pair d'individus mais les valeurs $x_{n/2}$ et $x_{(1+n/2)}$ sont égales.

La moyenne arithmétique est la valeur $\bar{x} = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.
Dans l'*exemple* considéré, 10,28 est la moyenne arrondie à 0,01 par excès.

Proposition. La moyenne est linéaire c'est-à-dire que si x et y sont deux séries statistiques de même taille et k un réel quelconque : $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$ $\quad \overline{kx} = k\overline{x}$

En particulier si a est un réel on a : $\overline{x-a} = \overline{x} - a$

Preuve.

$$\overline{x+y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{kx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} kx_i = k\overline{x}$$

Dans l'exemple étudié, les mode, médiane et moyenne ont des valeurs distinctes. Ces valeurs donnent une idée de l'ordre de grandeur de la série.

1.3 Caractéristiques de dispersion

L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur.
Dans l'*exemple* considéré l'étendue est 14.

La variance est la valeur $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

Dans l'*exemple* considéré la variance peut se calculer ainsi :

$$V = \frac{1}{18}\left[\begin{array}{l} 3(10,8-5)^2 + (10,8-7)^2 + 4(10,8-8)^2 + 2(10,8-10)^2 + 4(10,8-12)^2 + (10,8-14)^2 \\ +2(10,8-15)^2 + (10,8-19)^2 \end{array}\right]$$

V = 14,80

L'écart quadratique moyen ou écart type est la racine carrée de la variance $\sigma = \sqrt{V}$ =3,84.
Il a la même unité que x.

Proposition. Si k est un réel quelconque $\sigma(kx) = |k|\sigma(x)$ **.**

Preuve.

$$\sigma(kx) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(kx_i - \overline{kx})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(kx_i - k\overline{x})^2}{n}} = |k|\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(kx_i - k\overline{x})^2}{n}} = |k|\sigma(x)$$

Définition. Si α est un nombre compris entre 0 et 1, le fractile d'ordre α est le plus petit réel t tel que au moins α% de l'effectif est inférieur ou égal à t.
Lorsque α=1/4 ;1/2 ;3/4, on parle de premier, second et troisième quartile.
Lorsque α= 0,1 ;0,2 ;… ;0,9 on parle de premier, second,… neuvième décile.

Dans l'**exemple** considéré : la série a 18 valeurs
Le premier quartile est 8. En effet, au moins le quart des valeurs (cad 4,5) est inférieur ou égal à 8 (il y a 8 valeurs inférieurs ou égales à 8).Tandis qu'il n'y a que 4 valeurs inférieures ou égales à 7 donc 7 ne peut pas être le premier quartile.
Le second quartile est la médiane 10. Il coïncide avec la médiane.
Le troisième quartile est 12 car il y a 14 valeurs inférieures ou égales à 12 et seulement 10 inférieures ou égales à 11.

Le premier décile est 5.

Remarque. Un fractile est défini de manière unique **t**andis que, quand l'effectif total est un nombre impair, on a vu que la médiane n'est pas unique. On ne peut plus alors parler de coïncidence entre le second quartile et la médiane.

Ces valeurs donnent des renseignements sur la dispersion de la série statistique autour de la moyenne.

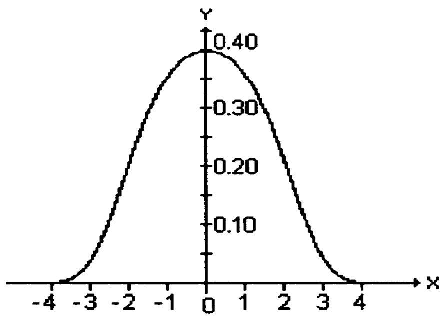
II. Un exemple de série statistique à une variable quantitative continue : la distribution de Laplace-Gauss

Une série statistique est à variable continue quand les valeurs possibles prises par la variable sont à priori en nombre infini et quelconque dans un intervalle de valeurs. Par exemple la vitesse d'un corps, l'age exact d'une personne exprimé en année, mois, jours,…. La représentation graphique de la série statistique est alors une courbe.

Les statisticiens se sont aperçus que de nombreux ensembles de mesures avaient le même type de distribution. Par exemple, l'ensemble des masses de *N* haricots prélevés au hasard dans un sac a le même type de distribution que l'ensemble des pressions barométriques enregistrées par différents étudiants lisant successivement sur le même baromètre. Les scientifiques ont donc été amenés à concevoir des modèles mathématiques qui soient le reflet des lois statistiques souvent rencontrées. Les deux exemples cités ci-dessus sont des séries statistiques discrètes mais elles sont modélisée par une série continue : la loi normale

2.1 Loi normale centrée réduite

La représentation graphique de cette relation est une courbe en forme de cloche appelée courbe de distribution normale (ou courbe de Gauss) :



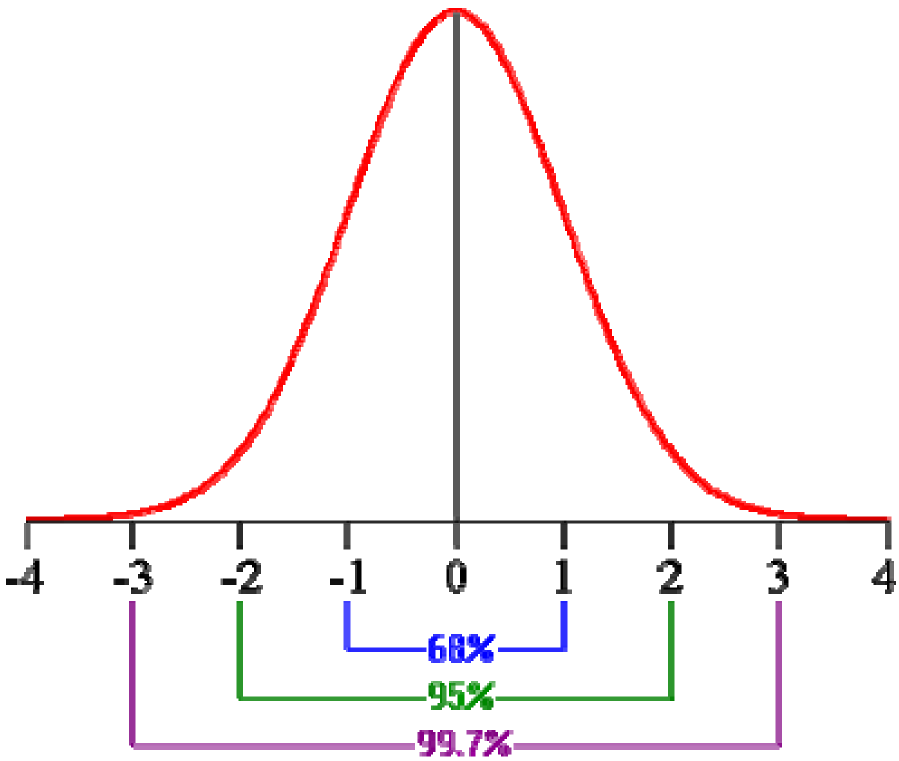
Courbe normale de Gauss

Si une variable *X* a une distribution normale, la probabilité que *X* soit compris entre *a* et *b* est donnée par l'expression : $P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{(-x^2/2)} dx$.

Notez que la fonction $e^{-x^2/2}$ étant toujours strictement positive, la probabilité que *X* soit compris entre *a* et *b* quelles que soient les valeurs de *a* et *b* n'est jamais nulle. Cependant,

comme l'indique le graphique ci-dessus la probabilité que *x* soit en dehors de l'intervalle[-4 ;4] est très faible, plus précisément , on a le résultat suivant.
La courbe particulièrement régulière de la distribution est telle que

- environ 68% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-1;1]$;
- environ 95% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-2;2]$ (en fait, $[-1,96;1,96]$;
- environ 99,7% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-3;3]$;
- environ 99,99% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-4;4]$.



2.2 Loi normale

On constate que la courbe représentative de la loi normale réduite est symétrique par rapport à la droite d'équation *x*=0, on dit qu'elle est centrée en 0. Par ailleurs, environ 68% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-1;1]$. Plus généralement, on appelle la loi normale, notée $N(m, s)$ ($m \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{R}^+$, une distribution ayant la même courbe mais centrée en *m* et telle que environ 68% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[m-s;m+s]$

Elle est telle que :

- environ 68% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[m+s;m-s]$;

- environ 95% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[m+s; m-s]$ (en fait, $[m+1{,}96s; m-1{,}96s]$;
- environ 99,7% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[m+3s; m-3s]$ *;*
- environ 99,99% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[m+4s; m-4s]$.

Remarques.
1. Quand on modélise un phénomène positif par une variable normale la modélisation ne se justifie que si m-4s ≥ 0. En effet il faut pouvoir assurer que toutes les valeurs possibles sont positives (du moins 99,99% d'entre elles).
2. Si X suit une loi normale $N(m, s)$, alors $\dfrac{X-m}{s}$ suit une loi normale réduite.

3. Série statistique à deux variables quantitatives discrètes

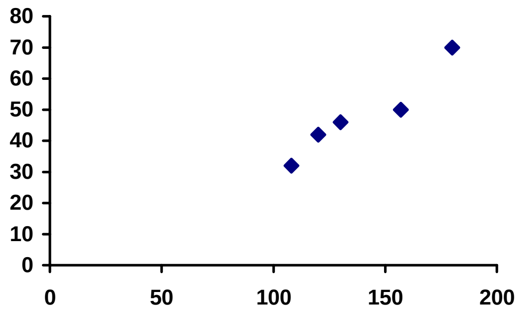
Dans cette partie, on considère une série statistique à deux variables quantitatives et discrètes. C'est-à-dire que n individus d'une population sont repérés par leurs valeurs sur deux caractères. C'est donc la donnée de n^2 valeurs distinctes ou non : (x_1, y_1), (x_2, y_2),… (x_n, y_n).

Exemple : La taille et le poids de chaque personne d'une famille
(120 ;42) ; (108 ;32) ; (130 ;46) ; (157 ;50) ; (180 ;70).

3.1 Représentation graphique de la série statistique

La série statistique peut être représentée dans un plan affine euclidien par l'ensemble des points de coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2),… (x_n, y_n). On parle de nuage de points.

Exemple La série statistique donnant le poids et la taille de chaque personne d'une famille peut être représentée par le nuage de points ci-dessous.



3.2 Principe des moindres carrés
Etant donnée une série à deux variables (x, y), ajuster la série par une fonction f d'un certain type (par exemple une fonction affine ou une fonction polynôme du second degré,…) c'est

chercher une fonction *f* telle que l'écart entre les points réels (x_i, y_i) et les points donnés par l'ajustement (x_i , $f(x_i)$) soit le plus petit possible.

On mesure cet écart par $\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2$.

La méthode des moindres carrés permet de faire des estimations. Elle est due à Gauss, voici dans quelles circonstances (extrait de wikipédia (http://fr.wikipedia.org/)

> Piazzi observa Cérès (une planète) 24 fois, la dernière fois le 11 février. … Au début février, Cérès disparut derrière le Soleil et ne put être observé à nouveau. En avril, Piazzi envoya ses observations complètes à Oriani, Bode et Lalande à Paris. Elles furent publiées dans l'édition de septembre 1801 du *Monatliche Correspondenz*.
> Afin de retrouver l'astéroïde, Carl Friedrich Gauss développa une méthode de réduction d'orbite basée sur trois observations. En l'espace de quelques semaines, il prédit celle de Cérès et communiqua ses résultats à Franz Xaver von Zach, éditeur du *Monatliche Correspondenz*. Le 31 décembre 1801, von Zach et Heinrich W. M. Olbers confirmèrent que Cérès avait été retrouvé, validant ainsi la méthode.

3.3 Droite des moindres carrés ou droite de régression linéaire.

Supposons que la représentation graphique suggère d'envisager un ajustement des données à l'aide d'une droite. Dans ce cas on cherche la fonction *f* sous la forme d'une fonction affine $f(x) = ax + b$.

Il faut trouver *a* et *b* pour que $\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ soit minimal.

Notons $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ les moyennes respectives de *x* et *y*.

Notons $V_x^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) - \overline{x}^2$ et $V_y^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right) - \overline{y}^2$ le carré des variances de *x* et y.

Notons enfin $V_{x\,y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$.

Alors,

$$A = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n}y_i^2 + a^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + nb^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - 2b\sum_{i=1}^{n}y_i + 2ab\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$= n(V_y^2 + \overline{y}^2) + a^2 n(V_x^2 + \overline{x}^2) + nb^2 - 2an(V_{x,y} + \overline{x}\,\overline{y}) - 2bn\overline{y} + 2ab\overline{x}$$

Si on suppose que les points ne sont pas alignés sur une même droite verticale c'est-à-dire que V_x est non nul, en factorisant, on a :

$$A = n\left[\left(\overline{y} - a\overline{x} - b\right)^2 + \left(aV_x - \frac{V_{x\,y}}{V_x}\right)^2 - \left(\frac{V_{x\,y}}{V_x}\right)^2 + V_y^2\right]$$

Cette expression est minimale pour $\overline{y} - a\overline{x} - b = 0$ et $aV_x - \frac{V_{x\,y}}{V_x} = 0$.

Donc la droite passe par le point moyen. L'équation de la droite de régression est

$$y = \frac{V_{x\,y}}{V_x^2}(x - \overline{x}) + \overline{y} \ .$$
