Corrigé de l'examen de Mathématiques

Exercice 1 (7,5 points)

1. Pour construire F_{k+1} partant de F_k, on partage chaque côté de F_k en trois segments (*pour être précis, il aurait fallu dire "trois segments de même longueur"*). Donc, le côté du triangle
$\boxed{\text{0,5 pt}}$ équilatéral que l'on colle est égal au tiers de c_k, c'est-à-dire $c_{k+1} = c_k/3$. Quant au nombre de côtés, chaque côté de F_k donne visiblement naissance à 4 côtés de F_{k+1} : les deux correspondant aux segments extrêmes du découpage en trois, puis les deux correspondant à deux côtés du
$\boxed{\text{0,5 pt}}$ triangle équilatéral que l'on vient de coller. Ainsi $n_{k+1} = 4n_k$.

$\boxed{\text{0,5 pt}}$ On a donc deux suites géométriques de raisons 1/3 et 4, donc $c_{k+1} = (\frac{1}{3})^{k+1}c_0$ et $n_{k+1} = 4^{k+1}n_0$. (Soit on considère que c'est du cours, soit on le démontre par récurrence, ce qui est quasi-immédiat.)

2. P_k est égal à la longueur d'un côté multiplié par le nombre de côtés : $P_k = c_k n_k = (\frac{1}{3})^k c_0 \times$
$\boxed{\text{0,5 pt}}$ $4^k n_0 = 3 \times (\frac{4}{3})^k c_0$.

$\boxed{\text{0,5 pt}}$ Comme $4/3 > 1$, ceci tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$, donc F a un périmètre infini.

3. Méthode directe : chaque triangle équilatéral qu'on colle sur les côtés de F_k pour fabriquer F_{k+1} a pour côté $c_k/3 = c_{k+1} = (\frac{1}{3})^{k+1}c_0$. D'après la formule donnant l'aire d'un triangle, on
$\boxed{\text{1 pt}}$ trouve $\alpha_k = \frac{\sqrt{3}}{4}(c_{k+1})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{3})^{2(k+1)}(c_0)^2$.

Relation de récurrence entre α_{k+1} et α_k : le triangle d'aire α_{k+1} est l'image du triangle d'aire α_k par une homothétie de rapport 1/3, donc par homogénéité de l'aire on a $\alpha_{k+1} = \frac{1}{9}\alpha_k$. On en déduit que $\alpha_k = (\frac{1}{9})^k\alpha_0 = (\frac{1}{9})^k \times \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{3})^2(c_0)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{3})^{2(k+1)}(c_0)^2$.

4. L'aire de F_{k+1} est la somme de l'aire de F_k et des aires des n_k triangles équilatéraux que l'on
$\boxed{\text{0,5 pt}}$ ajoute, donc on a $A_{k+1} = A_k + n_k\alpha_k$. Pour montrer que $A_{k+1} = A_0 + \frac{1}{3}A_0\big[1 + \frac{4}{9} + \big(\frac{4}{9}\big)^2 +$
$\boxed{\text{0,5 pt}}$ $\cdots + \big(\frac{4}{9}\big)^k\big]$, on peut procéder par récurrence. Pour cela on observe que $n_0\alpha_0 = \frac{1}{3}A_0$ (c'est un calcul facile) et de plus $n_k\alpha_k$ est une suite géométrique, car n_k et α_k le sont toutes les deux.
$\boxed{\text{0,5 pt}}$ Précisément, on trouve $n_{k+1}\alpha_{k+1} = (\frac{4}{9})^{k+1} \times \frac{1}{3}A_0$. Passons à la démonstration par récurrence. La formule est vraie pour $k = 0$ car $A_1 = A_0 + n_0\alpha_0 = A_0 + \frac{1}{3}A_0$. Supposons que pour un entier $k \geq 1$, la formule est vraie, alors

$$\begin{aligned} A_{k+2} &= A_{k+1} + n_{k+1}\alpha_{k+1} = A_0 + \tfrac{1}{3}A_0\big[1 + \tfrac{4}{9} + \big(\tfrac{4}{9}\big)^2 + \cdots + \big(\tfrac{4}{9}\big)^k\big] + n_{k+1}\alpha_{k+1} \\ &= A_0 + \tfrac{1}{3}A_0\big[1 + \tfrac{4}{9} + \big(\tfrac{4}{9}\big)^2 + \cdots + \big(\tfrac{4}{9}\big)^k + \big(\tfrac{4}{9}\big)^{k+1}\big] \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 pt}}$ Donc la formule est vraie au rang $k + 1$. Donc la formule est vraie pour tout $k \geq 0$.

5. On utilise la formule classique :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \; .$$

$\boxed{\text{1 pt}}$ En faisant $q = 4/9$ dans l'expression $A_{k+1} = A_0 + \frac{1}{3}A_0\big[1 + \frac{4}{9} + \big(\frac{4}{9}\big)^2 + \cdots + \big(\frac{4}{9}\big)^k\big]$, on trouve

$$A_{k+1} = A_0 + \frac{1}{3}A_0\Big[\frac{1 - (\frac{4}{9})^{k+1}}{1 - (\frac{4}{9})}\Big] \; .$$

Puisque $4/9 < 1$, lorsque k tend vers $+\infty$, la limite de $(\frac{4}{9})^{k+1}$ est 0 et donc la limite de A_{k+1},
$\boxed{\text{0,5 pt}}$ c'est-à-dire l'aire du flocon, est

$$A_0 + \frac{1}{3}A_0\Big[\frac{1}{1 - (\frac{4}{9})}\Big] = A_0 + \frac{1}{3}A_0 \times \frac{9}{5} = \frac{8}{5}A_0 \; .$$

Exercice 2 (2,5 points)

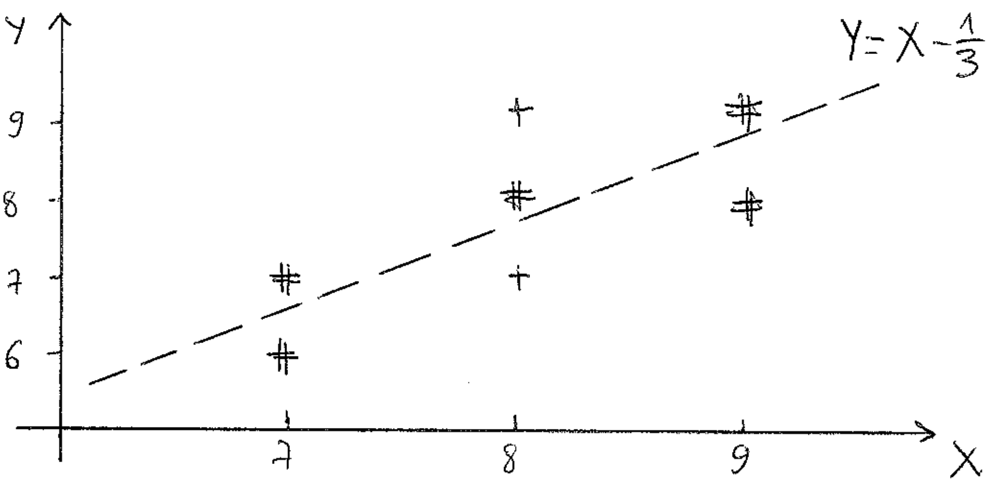
On peut tracer sur une droite des points B, U, P, V, Q qui représentent, dans cet ordre : Bixley, l'endroit où est posée la 1ère question, Pixley, l'endroit où est posée la 2ème question, et
0,5 pt Quixley. Les données de l'énoncé indiquent que les points sont dans cet ordre-ci et pas un autre (certains ont mis Pixley après Quixley !). On sait que $UV = 7$ et :

0,5 pt $$BU = \frac{1}{2}UP,$$
0,5 pt $$VQ = \frac{1}{2}PV$$

1 pt Donc $BQ = BU + UP + PV + VQ = \frac{1}{2}UP + UP + PV + \frac{1}{2}PV = \frac{3}{2}(UP + PV) = \frac{3}{2}UV = \frac{3\times 7}{2} = 10,5$ km.

Exercice 3 (5 points)

1 pt 1.



0,5 pt 2. Moyenne $\overline{X} = 8$,

1 pt variance $V = 2/3 \approx 0,666\ldots$ (mais pour les calculs à venir il vaut mieux garder la valeur exacte !)

0,5 pt écart-type $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{2/3} \approx 0,816$.

3. La droite de régression de Y en X a pour équation $y = \frac{V_{xy}}{V_x}(x - \overline{x}) + \overline{y}$.

1 pt On trouvait pour la covariance $V_{xy} = 2/3$

0,5 pt donc équation $y = x - \frac{1}{3}$.

0,5 pt 4. Pour un enfant de 10 ans, ceci donne un résultat de $10 - \frac{1}{3} = 29/3 \approx 9,666\ldots$

Exercice 4 (5 points)

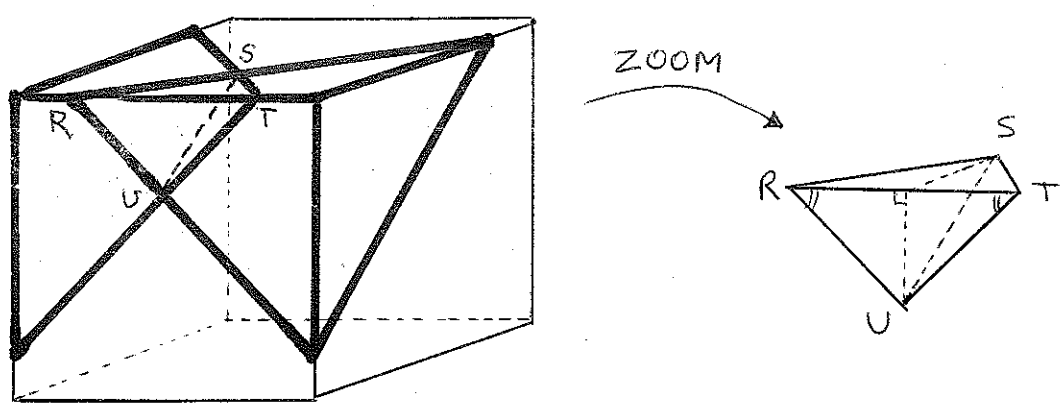
0,5 pt 1. Pour un cube on a $S = 8$, $A = 12$ et $F = 6$ donc on a bien $S - A + F = 2$. (Beaucoup ont compté S, A, F pour la figure qui était donnée dans l'énoncé, qui n'était pas un cube !!)

2. C'était la question la plus difficile du devoir, la notation a été très large.

Il est **VITAL** de connaître la formule qui donne le volume d'un tétraèdre : $V = \frac{1}{3}B \times h$.
0,5 pt Combien oublient le $\frac{1}{3}$!... Par ailleurs, dans cette formule, on peut choisir la base qu'on préfère (et la hauteur correspondante) : après tout un tétraèdre a 4 faces, et aucune n'est plus jolie que les autres a priori...

Allons-y. Lorsqu'on coupe *un* coin, on enlève un tétraèdre de volume $V_1 = \frac{1}{3}\frac{(a-x)^2}{2}(a - x) =$
0,5 pt $\frac{(a-x)^3}{6}$. (C'est facile à calculer si on choisit comme base l'une des trois faces situées sur les faces du cube, et pas la quatrième).

0,5 pt Quand on enlève un autre coin, on voit que si on retranche deux fois le volume d'un coin, on en enlève trop car les deux coins se chevauchent sur un petit tétraèdre que voici :



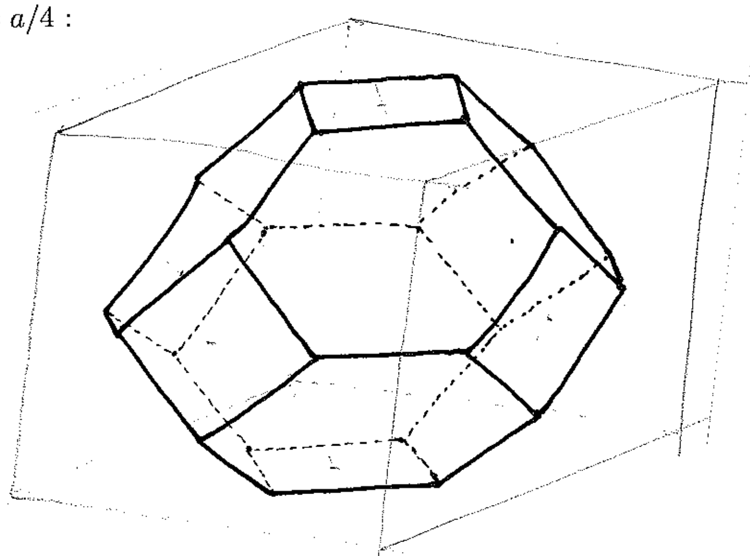
En choisissant pour base l'une des deux faces situées sur les faces du cube (il est quasiment immédiat de voir que ces faces sont des triangles rectangles isocèles), on trouve que le volume de ce petit tétraèdre est $V_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a-x}{2}\right)\frac{a-x}{2} = \frac{(a-2x)^3}{24}$. Comme on a enlevé deux fois le volume de ce petit tétraèdre, il faut l'ajouter une fois pour compenser. Ceci est à faire pour chaque paire de coins enlevés, c'est-à-dire une fois par arête. Pour trouver le volume du polyèdre final il faut partir du volume du cube soit a^3, ensuite enlever les 8 coins soit $8V_1$, puis rajouter le volume V_2 d'un petit tétraèdre sur chaque arête, soit $12V_2$. On trouve

1 pt

$$V = a^3 - 8V_1 + 12V_2 = a^3 - \frac{4}{3}(a-x)^3 + \frac{1}{2}(a-2x)^3 .$$

1 pt Si le volume était donné juste pour $x = a/2$, il y avait un point.

Voici l'allure du polyèdre pour $x = a/4$:



0,5 pt 3. Si $0 < x < \frac{a}{2}$ on a $S(x) = 24$, $A(x) = 36$ et $F(x) = 14$.

0,5 pt Si $x = 0$ on a $S(x) = 6$, $A(x) = 12$ et $F(x) = 8$.

0,5 pt Si $x = \frac{a}{2}$ on a $S(x) = 12$, $A(x) = 24$ et $F(x) = 14$.

On vérifie à chaque fois que $S(x) - A(x) + F(x) = 2$.

0,5 pt 4. La fonction F est continue (on voit qu'elle reste constante égale à 14 au voisinage de $x = a/2$, donc

0,5 pt fonction $S - A$ est continue aussi, puisque $S - A = 2 - F$.

Ce sont les seules, toutes les autres proposées ne sont pas continues.