

Devoir à la maison

A. Lecture des résultats

(A.1) On dit qu'un gaz suit la loi des gaz parfaits si la pression P du gaz, sa température T , son volume V son liés par la relation

$$PV = nRT .$$

Dans cette formule, n est le nombre de moles de gaz considérées et R est la *constante des gaz parfaits*, dont une valeur approchée est $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ (le symbole J désigne le Joule, unité S.I. pour mesurer l'énergie). Les autres unités S.I. impliquées sont l'hectoPascal (HPa) pour mesurer la pression, le mètre cube (m^3) pour mesurer le volume, et le Kelvin (K) pour mesurer la température.

La correspondance avec les unités qui apparaissent dans l'énoncé sont que une atmosphère vaut $1,013 \times 10^5 \text{ Hpa}$, un degré Celsius vaut $273,15$ Kelvin, et un m^3 vaut 1000 litres.

(A.2) Si le gaz était un gaz parfait, alors le ratio PV/RT serait égal au nombre de moles, ici 1. Le fait que la ligne correspondante contienne des valeurs sensiblement différentes de 1, et qui de plus présentent des variations, indique que le gaz ne se comporte pas comme un gaz parfait.

B. Un modèle approché pour l'équation d'état

(B.1)

$V(\ell)$	23,369066	23,486612	23,603512	23,719774	23,835405
$\ln(PV/RT)$	0,0286448	0,0321186	0,0355746	0,039011	0,042429

$V(\ell)$	23,950412	24,064803	24,178584	24,291762
$\ln(PV/RT)$	0,0458286	0,0492091	0,0525725	0,055918

$V(\ell)$	24,404345	24,516338	24,627749	24,738583
$\ln(PV/RT)$	0,0592457	0,0625568	0,0658495	0,0691257

(B.2) Cf graphique en dernière page.

(B.3) On doit trouver à peu près $a = 0,02957$ et $b = -0,66242$.

(B.4) On constate, sur le graphique en échelle logarithmique, que les points sont alignés (mis à part un point qui a l'air décalé ; ceci peut être dû soit à une erreur de mesure lors de l'expérience, soit à une erreur de ma part lorsque j'ai placé les points sur le graphique). Cela veut dire qu'il existe une relation linéaire entre $\ln(PV/RT)$ et V , précisément il existe des coefficients a, b tels que $\ln(PV/RT) = aV + b$; on a déterminé les coefficients a et b empiriquement à la question précédente. En prenant l'exponentielle, on trouve $PV/RT = e^{aV+b} = e^b e^{aV}$. C'est exactement ce que suggérait le chercheur. Sur notre exemple, il semble donc que cette suggestion soit vérifiée.

(B.5) La définition d'une fonction exponentielle est que $c^x = \exp(x \ln(c))$. Utilisant les propriétés de l'exponentielle ordinaire (celle de base e), on en déduit bien que $c^{xy} = \exp(xy \ln(c)) = \exp(x \ln(c))^y = (c^x)^y$.

(B.6) Dans les questions (B.3) et (B.4), on a trouvé des coefficients a, b tels que $\ln(PV/RT) = aV + b$, et en prenant l'exponentielle, on trouvait $PV/RT = e^{aV+b} = e^b e^{aV}$. Donc $V e^{-aV} = e^b RT/P$. Si on pose $\alpha = e^a$ et $\beta = e^b R/P$, cette équation prend la forme $V \alpha^{-V} = \beta T$.

(B.7) (Question facultative) Pour calculer les coefficients d'une équation de droite $y = ax + b$ passant près de ces points, à partir des seules coordonnées des points, on peut imaginer plein de techniques. Une technique naturelle est de penser à un procédé de moyenne, pour trouver une droite qui passe « en moyenne » près des points. Pour cela, pour chaque paire de points (il y a 13 points, donc $C_{13}^2 = \frac{13 \times 12}{2} = 78$ paires de points, c'est à ça que servent les coefficients binômiaux !), on calcule l'équation de la droite joignant ces deux points. On trouve 78 coefficients directeurs a_1, a_2, \dots, a_{78} et 78 ordonnées à l'origine b_1, b_2, \dots, b_{78} . Ensuite on calcule la moyenne des a_i , qu'on appelle \bar{a} , et la moyenne des b_i , qu'on appelle \bar{b} . L'équation de droite $y = \bar{a}x + \bar{b}$ est « sans doute » une droite qui passe « en moyenne » près des points...

Vous verrez bientôt en cours la technique de la regression linéaire (droite des moindres carrés), qui donne une réponse un peu plus satisfaisante à la question.

C. Étude mathématique du volume en fonction de la température

(C.1) La fonction f est continue et dérivable sur I , et même sur \mathbb{R} , car elle est composée de fonctions continues et dérivables sur \mathbb{R} . De plus l'expression de la dérivée est

$$f'(V) = \alpha^{-V} - \ln(\alpha)V\alpha^{-V} = (1 - \ln(\alpha)V)\alpha^{-V}.$$

Or, si $V \in I$, on a $0 < V < \frac{1}{\ln(\alpha)}$ et donc $1 - \ln(\alpha)V > 0$. Donc f est strictement croissante sur I . Il en découle, par le théorème de la bijection monotone, que c'est une fonction bijective de I sur $f(I) =]f(0); f(\frac{1}{\ln(\alpha)})[$. Or

$$f\left(\frac{1}{\ln(\alpha)}\right) = \frac{1}{\ln(\alpha)} e^{-\frac{1}{\ln(\alpha)} \ln(\alpha)} = \frac{e^{-1}}{\ln(\alpha)},$$

donc $f(I) =]0; 1/(e \ln(\alpha))]$.

(C.2) La fonction réciproque d'une fonction bijective $f: I \rightarrow J$ est la fonction $g: J \rightarrow I$ telle que pour tout $x \in I$ on a $g(f(x)) = x$ et pour tout $y \in J$ on a $f(g(y)) = y$. En d'autres termes, si $x \in I$ et $y \in J$, on a $y = f(x) \iff x = g(y)$.

On sait que la température T et le volume V de notre gaz sont liés par la relation $\beta T = V \alpha^{-V} = f(V)$, donc en prenant les images par g , on trouve $V = g(f(V)) = g(\beta T)$.

De plus, g est croissante : pour le voir, il faut montrer que $y_1 < y_2$ entraîne $g(y_1) < g(y_2)$. Mais si on avait $g(y_1) \geq g(y_2)$, alors en prenant les images par f on trouverait $y_1 = f(g(y_1)) \geq f(g(y_2)) = y_2$, puisque f est croissante. Or ceci est contraire à l'hypothèse sur y_1 et y_2 . Donc par contraposée, on obtient bien $g(y_1) < g(y_2)$. Donc g est croissante : en fait, notre raisonnement montre que la fonction réciproque d'une fonction bijective croissante, est croissante.

On peut d'ailleurs retrouver ce résultat, lorsque la fonction f est strictement croissante et dérivable, en utilisant la formule qui donne l'expression de la dérivée de g (cf le cours) en un point $y = f(x)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

En effet, si f' est strictement croissante, alors $f'(g(y)) > 0$ et donc $g'(y) > 0$, donc g est aussi strictement croissante.

Cela signifie que lorsque la température augmente, le gaz se dilate. De ce point de vue, le comportement du gaz est similaire au comportement d'un gaz parfait.

(C.3) Notons V_0 le volume du gaz à la température $T = 333,15$ Kelvin. D'après ce qui précède, V_0 est solution de l'équation $\beta T = V_0 \alpha^{-V_0}$, c.-à-d. $V_0 \alpha^{-V_0} - \beta T = 0$. En remplaçant α, β, T par leurs valeurs numériques, on trouve : $V_0 \times 1,030^{-V_0} - 0,159 \times 333,15 = 0$. Notons $h(V) = V \times 1,030^{-V} - 0,159 \times 333,15$. Il s'agit de donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de la solution V_0 de l'équation $h(V) = 0$. Pour trouver une valeur approchée recherchée, on peut procéder en découpant en 10 les intervalles des litres, puis des dixièmes de litres, etc. Sur le tableau de données initial, on voit que tous les 10 degrés Celsius, le volume augmente d'environ 0,5 litres, donc V_0 doit être proche de 25,2 litres. Ceci nous aide pour savoir où commencer : avec la calculatrice, on trouve :

$$\begin{aligned}h(25) &\approx -0,626 \\h(25,1) &\approx -0,261 \\h(25,2) &\approx 0,105 \\h(25,11) &\approx -0,225 \\h(25,12) &\approx -0,188 \\h(25,13) &\approx -0,152 \\h(25,14) &\approx -0,115 \\h(25,15) &\approx -0,078 \\h(25,16) &\approx -0,042 \\h(25,17) &\approx -0,005 \\h(25,18) &\approx 0,032\end{aligned}$$

Donc $V_0 \approx 25,17$ litres, à 10^{-2} près par défaut.

$\ln\left(\frac{PV}{RT}\right)$

0,07

0,06

0,05

0,04

0,03

$y = 0,02957x - 0,66242$

23,5

24

24,5

V

