Corrigé contrôle de mars

Ex 1

Soit *x* le nombre $1,\underline{35}\underline{35}.....$ On a 99*x*= 134. Donc *x*=134/99.

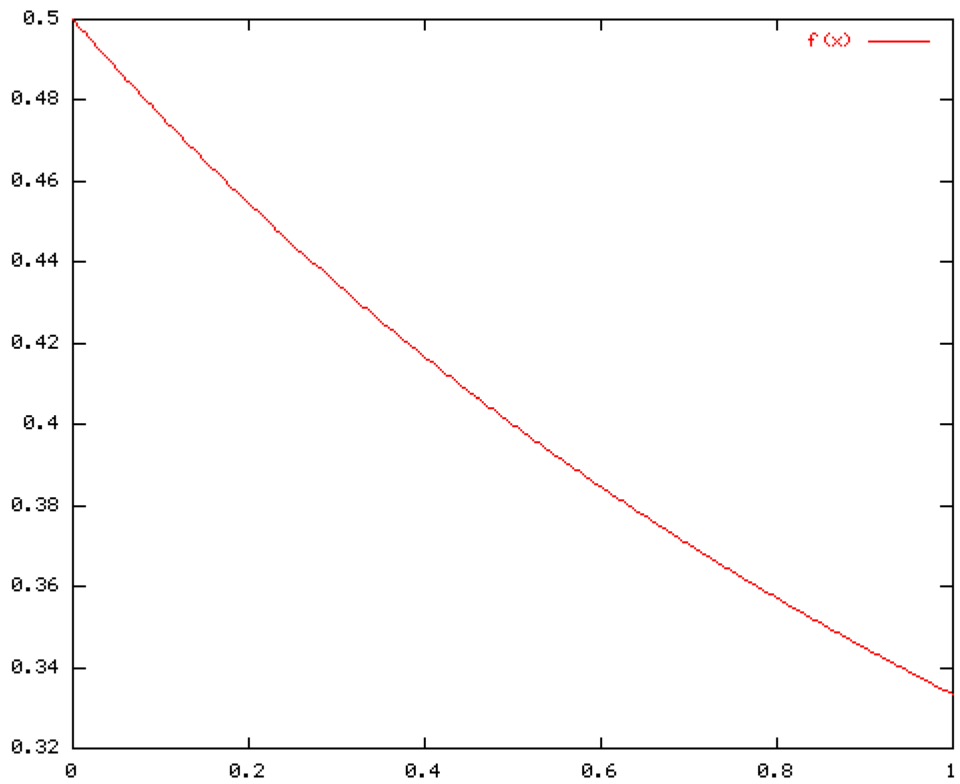
Mais la bicyclette à roue arrière motrice a été inventée après le vélocipède donc après 1817. Il faut donc trouver n tel que 134*n* soit supérieur à 1817. Or 1817/134 $\simeq$ 13,5. donc n est supérieur ou égal à 14.

SI n=14 la date de l'invention de la bicyclette à roue arrière motrice serait 1876. Si *n*=15, elle serait 2010 ce qui ne convient pas.

Les deux dates cherchées sont donc 1876 et 99x14=1386.

Ex2

1. L'équation admet deux racines : $-1-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-1$
2. La fonction *g* est définie et continue sur $[0;1]$. Sa dérivée vaut $g'(x)=-\dfrac{1}{(2+x)^2}$ **; elle** est négative donc la fonction est décroissante de 1/2 à 1/3. Voici sa courbe représentative



3. La fonction *f* est définie sur l'intervalle [0 ;1] à valeurs dans [1/3 ;1/2] qui est inclus dans l'intervalle de définition ; on pourra donc toujours calculer $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus si x est un rationnel alors 1/(2+x) aussi car les rationnels forment un corps donc la suite (u_n) est une suite de rationnels.
4. On a $u_0 = 0; u_1 = 1/2; u_2 = 2/5; u_3 = 5/12; u_4 = 12/29$
5. **a.** Soit *f* une application de l'intervalle $[a,b]$ dans **R** continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

   b. On a, d'après la première question $f(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$., soit en appliquant le théorème des accroissement finis

Il existe un c compris entre u_n et $\sqrt{2}-1$ tel que $f(u_n)-(\sqrt{2}-1) = f'(c)\left[u_n-(\sqrt{2}-1)\right]$

Or, si c est compris entre u_n et $\sqrt{2}-1$; il est aussi compris entre 0 et 1 et donc $|f'(c)| < 1/4$ d'où le résultat.

6. On montre facilement par récurrence que $\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4^n}(\sqrt{2}-1)$; ce qui prouve que la suite a pour limite $\sqrt{2}-1$.

7. On a, en prenant n=3, $\left|u_4-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4^3}(\sqrt{2}-1) \leq \frac{1}{4^3} \leq 0,016$

8. Donc $-0,01 \leq u_4-\sqrt{2}+1 \leq 0,01$. Or, u_4=12/29

Donc $-0,01 \leq u_4-\sqrt{2}+1 \leq 0,01$ et $1+\frac{12}{29}-0,01 \leq \sqrt{2} \leq 1+\frac{12}{29}+0,01$.

Donc $\sqrt{2} = 1,41 \pm 0,01$.

Ex 3

1. La fonction g est définie sur **R*+**

2. La fonction g est définie et continue sur **R*+.** Sa dérivée vaut $g'(x) = 2x+\frac{1}{x}$**.** Elle est positive sur l'intervalle **R*+**. La fonction g est donc croissante sur cet intervalle de $-\infty$ à $+\infty$

3. D'après le théorème de la bijection monotone, la fonction g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle de définition. Or, g(1)=-1 et g(2)=2-ln2>0 ; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur cherchée est comprise entre 1 et 2.

4. On a

$g(1,5) \approx 0,65 \quad g(1,25) \approx -0,21 \quad g(1,3) \approx -0,04 \quad g(1,4) \approx 0,30$.

donc $1,3 < \alpha < 1,4$

Ex 4 L'épaisseur sera de $0,02 \times 2^{50}\,\text{mm} \geq 22.10^6\text{km}$