TD 4 : Modification et compléments

Cette feuille est la suite de la feuille TD4 et elle a deux buts : modifier l'exercice 1 et compléter la feuille par des exercices 6 à 9.

Dans l'exercice 1, il s'agit de montrer que deux suites (u_n) et (v_n) convergent. L'indication qui vous est faite de montrer que les deux suites sont adjacentes mène en fait à des calculs compliqués qui ne sont pas la meilleure façon de s'en sortir. Nous reviendrons plus tard sur ces suites si le temps le permet, et vous proposons plutôt de modifier l'exercice 1 en étudiant deux suites différentes pour lesquelles la méthode des suites adjacentes fonctionne bien.

Exercice 1 On considère u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. Dans cet exercice on veut montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante sont adjacentes :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(1) Soient a, b des nombres réels > 0. Démontrez les deux inégalités utiles pour la suite de l'exercice :

$$(\star)\ \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad (\star\star)\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

(2) Montrez que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrez que (v_n) est une suite décroissante.

(4) Montrez que (u_n) est croissante.

(5) Utilisez l'inégalité $(\star\star)$ avec $a = u_n$ et $b = v_n - u_n$ pour obtenir que $(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 \leq v_n - u_n$. En développant le carré déduisez-en que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

(6) Montrez par récurrence que $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. Déduisez-en que $v_n - u_n$ tend vers 0.

Les quatre exercices suivants sont un approfondissement sur les logarithmes et exponentielles.

Exercice 6 Soit a un nombre réel strictement positif. On définit

(i) la fonction « logarithme en base a » notée $\log_a \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, par $\log_a(x) \overset{\text{déf}}{=} \ln(x)/\ln(a)$.

(ii) la fonction « exponentielle en base a » notée $a^{(\cdot)} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, par $a^x \overset{\text{déf}}{=} e^{x\ln(a)}$.

(1) Montrez que les fonctions ln et exp sont des cas particuliers de $\log_a$ et $a^{(\cdot)}$.

(2) Montrez que les fonctions $\log_a$ et $a^{(\cdot)}$ sont réciproques l'une de l'autre : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\log_a(x) = y$ si et seulement si $a^y = x$.

(3) Calculez les dérivées de $\log_a$ et de $a^{(\cdot)}$. Faites un tableau de variations et une représentation graphique de ces fonctions pour $a = 2$.

(4) Le nombre $\log_2(3) = \ln 3/\ln 2$ est-il rationnel ?

Exercice 7 Un démographe étudiant la propagation du SIDA dans les pays d'Afrique orientale (Kenya, Tanzanie, Mozambique, Afrique du Sud...) observe que depuis l'apparition de la maladie, le nombre de victimes est multiplié par $1,12$ tous les ans. Il souhaite « mettre ce phénomène en équations » pour pouvoir par exemple faire des prévisions à plus court terme (semaine ou mois).

(1) En 1975, que l'on compte comme l'année 0, on a compté $v(0) = 98$ victimes. Combien de victimes y a-t-il l'année n ? (*Le coefficient* $1,12$ *étant donné par l'observation d'une population de grande taille, il peut mener à des nombres non entiers pour des populations de taille moindre, par exemple* $98 \times 1,12 = 109,76$ *au bout d'un an. On ne s'en inquiètera pas.*)

(2) Comment extrapoler cette formule pour obtenir une expression du nombre de victimes en temps *continu* (t), et non plus seulement en temps *discret* (n) ?

(3) Faites une représentation graphique de la courbe d'évolution du nombre de victimes.

(4) Par combien est multiplié le nombre de victimes en un mois ? En combien de temps la moitié d'un pays de 60 millions d'habitants est-elle atteinte par la maladie ?

Exercice 8 Pour chacune des deux équations suivantes, écrire l'équation sous la forme $f(x) = 0$, étudier la fonction f (continuité, dérivabilité, tableau de variations, graphique) puis donner le nombre de solutions et un encadrement d'amplitude 10^{-1} des solutions (par la méthode de dichotomie par exemple).

(1) $\ln(x) = x + 1$.

(2) $\exp(x) = x + 2$.

Exercice 9 La représentation graphique de phénomènes qui croissent très vite pose certains problèmes spécifiques, pour lesquels l'utilisation d'une *échelle logarithmique* est parfois adaptée. Prenons l'exemple d'une population de lapins, composée d'un couple à $t = 0$, et qui double toutes les semaines. C'est un phénomène à croissance exponentielle, comme dans l'exercice 2.

(1) Sur un graphique de la fonction définie par $L(t) = 2^t$, placez les points correspondant aux semaines $n = 1, 2, 3, ..., 10$. Peut-on lire facilement la valeur du nombre de victimes $L(n)$ pour les premières années ?

(2) Tracez un nouveau graphique avec le temps t en abscisse, mais avec $\ln(L)$ au lieu de L en ordonnée. (C'est pour cela qu'on dit qu'on a pris une échelle logarithmique.) Placez les années $n = 1, 2, 3, ..., 10$.