Droites remarquables et cocyclicité (l)

Exercice l.1 (*À faire chez vous.*) Soit ABC un triangle.

(1) Démontrez que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ est la droite $\mathcal{H}_A$, hauteur du triangle issue de A.

(*Indic : montrez d'abord que si M appartient à $\mathcal{H}_A$ on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$. Ensuite démontrez que si M dans le demi-plan délimité par $\mathcal{H}_A$ et contenant B, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} < \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$. Pour cela introduisez le projeté orthogonal de M sur (BC).*)

(2) Déduisez-en une autre démonstration du fait que les hauteurs de ABC sont concourantes.

Dans les exercices l.2 et l.3 on démontre le résultat suivant, très utile en pratique :

> CONDITION DE COCYCLICITÉ
> Soient 4 points A, B, M, N, tels que $M \neq A, B$ et $N \neq A, B$. Alors :
> $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})\ (\pi) \quad \Leftrightarrow \quad A, B, M, N$ sont cocycliques ou alignés

Exercice l.2 Soient A, B, M trois points distincts situés sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

(1) Montrez que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ (2\pi)$. (*Indic : soit M' le point du cercle diamétralement opposé à M. Montrez d'abord que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'})\ (2\pi)$.*)

(2) On pose $\theta := \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Déduisez de (1) que les points $M \in \mathcal{C}$ vérifient tous $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta\ (\pi)$. (*Indic : attention au modulo !*)

Exercice l.3 Soient A et B deux points distincts et $\theta \in \mathbb{R}$.

(1) On suppose que $\theta \neq 0\ (\pi)$. Expliquez comment construire un cercle $\mathcal{C}$ dont tous les points distincts de A et B vérifient $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta\ (\pi)$. (*Indic : inspirez-vous de l'exercice précédent. Il faut d'abord construire le centre du cercle !*)

(2) Supposant toujours que $\theta \neq 0\ (\pi)$, montrez qu'il n'y a pas d'autre point vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta\ (\pi)$ que ceux de $\mathcal{C}$ privé de A et B. (*Indic : soit M un point vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta\ (\pi)$. Soit N l'intersection de la droite (AM) avec le cercle $\mathcal{C}$. Montrez que $M = N$ et concluez.*)

(3) Déduisez-en l'énoncé de la condition de cocyclicité.

En distinguant le cas $\theta \neq 0\ (\pi)$ et le cas $\theta = 0\ (\pi)$, dessinez l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta\ (2\pi)$, etl'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta + \pi\ (2\pi)$. On ne demande pas de justifier le dessin.

Exercice l.4 (*Une application de la condition de cocyclicité.*)

On donne un segment $[AB]$, et deux réels ℓ et γ. Expliquez comment construire un triangle ABC basé sur $[AB]$ et tel que $BC = \ell$ et $\widehat{ACB} = \gamma$. Donnez précisément les étapes de la construction.

Exercice l.5 (*Une autre application de la condition de cocyclicité.*)

Soit ABC un triangle. Soient A°, B°, C° les pieds des hauteurs issues de A, B, C.

(1) Montrez que les 4 points A, B, A°, B° sont cocycliques, ainsi que les 4 points A, C, A°, C° et les 4 points B, C, B°, C°.

(2) Déduisez-en que les hauteurs de ABC sont des bissectrices de $A^\circ B^\circ C^\circ$. Montrez par un dessin que ce ne sont pas forcément les bissectrices intérieures.

Admettant que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes, cela donne une autre démonstration du fait que les hauteurs sont concourantes.