Cas d'égalité des triangles (k)

Étant donné un triangle ABC on note α, β, γ les angles du triangle aux sommets A, B, C. Voilà les trois « cas d'égalité des triangles » classiques :

- **Premier cas d'égalité des triangles (CAC) :** Si deux triangles ont deux côtés égaux et les angles entre ces côtés égaux, alors ils sont isométriques. (Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\alpha = \alpha'$ alors ils sont isométriques.)

- **Deuxième cas d'égalité des triangles (ACA) :** Si deux triangles ont deux angles égaux et les côtés entre ces angles égaux, alors ils sont isométriques. (Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$ alors ils sont isométriques.)

- **Troisième cas d'égalité des triangles (CCC) :** Si deux triangles ont tous leurs côtés égaux, alors ils sont isométriques. (Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$ alors ils sont isométriques.)

Exercice k.1 Le premier cas d'égalité a été admis dans le cours, en tant que l'un des axiomes d'Euclide. Dans cet exercice on démontre le deuxième cas d'égalité. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que $AB = A'B'$, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. On doit montrer qu'ils sont isométriques. On appelle D l'unique point sur la demi-droite $[AC)$ tel que $AD = A'C'$.

(1) Montrez que les triangles ABD et $A'B'C'$ sont isométriques.

(2) Déduisez-en que D appartient à la demi-droite $[BC)$ (utilisez l'axiome (Ang1)).

(3) Déduisez-en que $D = C$, puis que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Exercice k.2 Dans cet exercice on se pose la question de savoir s'il existe un « cas d'égalité » pour les polygones convexes à n côtés, semblable au troisième cas d'égalité des triangles (CCC). Deux tels polygones sont *isométriques* s'il existe une isométrie qui transforme le premier en le deuxième (nous admettons que c'est la même chose que de dire que : les côtés correspondants successifs, dans un ordre de parcours fixé, sont égaux, et les angles successifs sont aussi égaux).

(1) Peut-on démontrer un cas d'égalité semblable pour les quadrilatères ? En d'autres termes : étant donnés deux quadrilatères convexes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ dont les côtés correspondants sont égaux ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, etc), sont-ils toujours isométriques ?

(2) Fixons un entier quelconque $n \geq 4$. Peut-on démontrer un cas d'égalité semblable pour les polygones convexes à n côtés ?

(3) Démontrez le résultat suivant (cas d'égalité pour les quadrilatères). Soient deux quadrilatères convexes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ dont les côtés correspondants sont égaux ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, etc) et avec une diagonale égale (par exemple $AC = A'C'$). Alors les quadrilatères sont isométriques.

(4) Pouvez-vous proposer un énoncé inspiré de celui de la question (3) pour les polygones convexes à 5 côtés ? (On ne demande pas de le démontrer.)