Transformations du plan (j)

On rappelle que les isométries du plan sont classifiées en :

(1) les *déplacements*, qui respectent l'orientation : les translations et les rotations.

(2) les *antidéplacements*, qui changent l'orientation : les réflexions, et les symétries glissées (composées d'une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur parallèle à $\mathcal{D}$).

Exercice j.1 (1) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles, s_1 et s_2 les réflexions par rapport à ces droites. Qu'est-ce que l'isométrie $t := s_2 \circ s_1$? Donnez ses éléments caractéristiques.

(2) Mêmes questions si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites sécantes.

Exercice j.2 Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$, H le pied de la hauteur issue de A, et O le point d'intersection de (IJ) avec (AH). Pour chaque point M du plan, on considère son image M^* par la symétrie centrale de centre O, puis l'image M' de M^* par la réflexion d'axe (BC). On souhaite étudier l'isométrie s ainsi définie par $s(M) = M'$.

(1) L'isométrie s préserve-t-elle l'orientation ?

(2) A-t-elle des points fixes ? (*Indic : montrez que si M est un point fixe, la médiatrice de $[MM^*]$ doit d'une part contenir O, d'autre part être égale à (BC). Aboutir à une contradiction.*)

(3) Quelle est la nature de s ? (*Utilisez la classification des isométries.*)

(4) On écrit s sous la forme $s = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$ où $\vec{v}$ et $\mathcal{D}$ sont à déterminer (les notations sont celles du cours, au paragraphe sur les isométries). Comment trouver $\vec{v}$?
(*Indic : comparez $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{v}}$, et calculez $s \circ s$.*)

(5) Comment ensuite déterminer $\mathcal{D}$?

Exercice j.3 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ soit un angle positif. On construit, à l'extérieur de $ABCD$, les triangles équilatéraux ADP et ABQ.

(1) Montrez que PQC est équilatéral.

(2) On considère l'isométrie qui transforme le triangle PDC en CBQ. Quelle est sa nature, quels sont ses éléments caractéristiques ? Pour répondre, décrivez cette isométrie comme composée de deux isométries r et t.

(*Indic : Construisez la droite $\mathcal{D}_1$ médiatrice de $[BD]$, la droite $\mathcal{D}_2$ perpendiculaire à (BD) passant par B, puis la droite $\mathcal{D}_3$ passant par B et telle que l'angle de droites $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2)$ soit égal à $\pi/3$. Décomposez r et t en vous aidant de ces éléments, et concluez.*)

Exercice j.4 Pour vérifier que le phénomène qui se produit dans l'exercice j.2 est général :

(1) Montrez que la composée d'une symétrie centrale et d'une réflexion est une symétrie glissée.

(2) Montrez qu'une symétrie glissée est la composée d'une symétrie centrale et d'une réflexion.

Exercice j.5 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres A et A' et de rayons non nuls r et r'. Montrez qu'il existe deux homothéties/translations qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

(*Indic : quel peut être le rapport d'une telle homothétie ?*)