pgcd et ppcm (g)

*Une * désigne un exercice un peu plus difficile.*

Exercice g.1 Utilisez l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd des nombres :

(a) 360 et 756	(c) 3276 et 3861
(b) 322 et 1078	(d) 942 et 1319

Pour (a) et (d) donnez une relation de Bézout.

Exercice g.2 Soient a, b et c trois entiers strictement positifs tels que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c)$. A-t-on $\text{ppcm}(a, b) = \text{ppcm}(a, c)$?

Exercice g.3 Soient $a, b \in \mathbb{N}$ strictement positifs. Soit $k > 0$ un entier. Montrez que $\text{pgcd}(ka, kb) = k\,\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(ka, kb) = k\,\text{ppcm}(a, b)$.

Exercice g.4 Soit n un entier naturel non nul. Démontrez, en utilisant le théorème de Bézout, que les nombres suivants sont premiers entre eux : (a) n et $2n + 1$ (b) $5n + 2$ et $7n + 3$.

Exercice g.5 Soient a et b des entiers relatifs premiers entre eux. Montrez que pour tout entier n (naturel ou relatif), il existe un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ *unique* vérifiant

(i) $n = \lambda a + \mu b$, et

(ii) $0 \leq \lambda < b$.

Exercice g.6 Trouvez les couples (a, b) d'entiers naturels $(a < b)$ dont le pgcd d et le ppcm m vérifient : $2m + 3d = 78$ et tels que a ne divise pas b.

Exercice g.7 Soient $a, b \in \mathbb{N}$ non tous deux nuls et $d = \text{pgcd}(a, b)$. On se propose de décrire tous les couples (λ, μ) tels que $d = \lambda a + \mu b$ (les « couples de Bézout » pour a et b). Ceci revient, si on veut, à résoudre l'équation $ax + by = d$: on a juste changé le nom des inconnues ! On fixe un couple solution (λ_0, μ_0), donné par exemple par l'algorithme d'Euclide. Soient a', b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

(1) Vérifiez qu'il n'y a jamais un seul couple de Bézout (λ, μ). (Commencez par le faire sur un exemple, puis dans le cas général, partez de la solution (λ_0, μ_0) et fabriquez-en une autre en ajoutant un multiple de b à λ_0...)

(2) Soit (λ, μ) un autre couple qui vérifie l'égalité de Bézout. Montrez que b' divise $\lambda - \lambda_0$.

(3) Montrez que les « couples de Bézout » (λ, μ) sont exactement les couples de la forme

$$(\lambda, \mu) = (\lambda_0 + kb', \mu_0 - ka') \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice g.8 Soient $d > 0$ et $m > 0$ deux entiers.

(1) Déterminer à quelle(s) condition(s) d et m peuvent être le pgcd et le ppcm de deux entiers a et b.

(2) On suppose que $d|m$ et on appelle ν le nombre de diviseurs premiers de m/d. Montrer que le nombre de couples (a, b) tels que $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $m = \text{ppcm}(a, b)$ est égal à 2^ν.

(*Indications pour (2) : On a* $m = de$. *Écrivez la DFP* $e = p_1^{\epsilon_1} \dots p_\nu^{\epsilon_\nu}$ *où* ν *est le nombre de facteurs premiers de* e. *Des entiers* a *et* b *tel que* $\text{pgcd}(a, b) = d$ *et* $\text{ppcm}(a, b) = m$ *doivent être divisibles par* d *et diviser* m *donc de la forme* $a = dp_1^{\alpha_1} \dots p_\nu^{\alpha_\nu}$ *avec* $0 \leq \alpha_i \leq \nu_i$ *(et idem pour* b*). Exprimez le fait que le pgcd de* a *et* b *est égal à* d*, puis comptez les couples* (a, b) *qu'on obtient ainsi...*)

Exercice g.9 * On rappelle que par définition, on dit qu'un nombre réel T est une période pour f si et seulement si on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Pour toute fonction périodique non constante, il existe une plus petite période strictement positive T_0, et l'ensemble de toutes les périodes de f est l'ensemble des multiples de T_0 dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\{\dots, -2T_0, -T_0, 0, T_0, 2T_0, \dots\}$.

Déterminer la (plus petite) période de la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos \frac{x}{21} + \cos \frac{x}{35}$$

(*Indications : posez* $g_1(x) = f(x) + 21^2 f''(x)$ *et* $g_2(x) = f(x) + 35^2 f''(x)$ *où* f'' *désigne la dérivée seconde de* f. *Calculez* f'', g_1, g_2 *(ce qui doit vous faire comprendre pourquoi on choisit ces fonctions). Ensuite montrez que si* T *est une période pour* f *alors c'est une période pour* f'', g_1, g_2. *Déduisez-en le résultat.*)

Exercice g.10 * Soit $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que

- $f(2) = 2$
- $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tout couple d'entiers premiers entre eux (m, n).

(1) Montrez que $f(n) \geq n$ pour tout $n \geq 0$.

(2) En partant de l'inégalité $15 < 18$ montrez que $f(3) = 3$.

(3) Montrez que $f(2^n + 1) = 2^n + 1$ pour tout $n \geq 1$.

(4) Déduisez-en que $f(n) = n$ pour tout n.

Indications :

(1) *Faites une récurrence sur* n *en utilisant le fait que le fonction est strictement croissante.*

(2) $f(15) < f(18)$, *puis utilisez le fait que* $f(mn) = f(m)f(n)$ lorsque m et n sont premiers entre eux *(attention !). Il faut aussi utiliser le fait que* $f(9) < f(10)$.

(3) *Récurrence sur* n, *en utilisant la question (1) et le fait que* $2^{n+1} + 1 < 2^{n+1} + 2 = 2(2^n + 1)$.

(4) *L'idée est que les nombres* $2^n + 1$ *« encadrent » tous les nombres jusqu'à l'infini. Précisément, supposez qu'il existe un* n *tel que* $f(n) > n$, *et cherchez à aboutir à une contradiction avec la question (3).*