Divisibilité et congruences (f)

*Une * désigne un exercice un peu plus difficile.*

Exercice f.1 (1) Soit x un entier naturel. Montrez que $x+1$ divise x^3+1.

(2) Montrez par récurrence que $\forall k \geq 1$, 3^k divise $2^{3^k}+1$.

Exercice f.2 Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 5 pour tout entier n.

Exercice f.3 Soit p un nombre premier. Montrez que pour tout entier i tel que $0 < i < p$ on a $p \mid \mathrm{C}_p^i$. (*Indication : utilisez la définition de* C_p^i *puis le lemme de Gauss.*)

Exercice f.4 Soit p un nombre premier.

(1) En utilisant la formule du binôme de Newton et le résultat de l'exercice précédent, montrez que pour tous entiers a, b on a : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad (p)$.

(2) Déduisez-en que pour tout $n \geq 0$, $n^p - n$ est divisible par p (raisonner par récurrence). Cela généralise le résultat de l'exercice **??**.

(3) Le résultat de la question (2) est-il vrai si p n'est pas premier ?

Exercice f.5 * Résolvez l'équation $x^y = y^x$ dans $\mathbb{N}$.
(*Commencez par montrer que si $x < y$ alors x divise y.*)

Exercice f.6 Résolvez dans $\mathbb{Z}$ les équations :

(1) $3x \equiv 1 \bmod 5$.

(2) $5x \equiv 2 \bmod 7$.

(3) Le système formé par (1) et (2).

Exercice f.7 Décomposez 217 en produit de facteurs premiers. En utilisant cette décomposition, résolvez l'équation $x^3 + y^3 = 217$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice f.8 **

On propose un jeu à une équipe de 100 personnes. Après avoir pris connaissance des règles du jeu, que nous allons décrire, l'équipe peut mettre au point une stratégie pour maximiser son score. Ensuite, le jeu commence, et les participants ne peuvent plus communiquer entre eux.

Au début du jeu, on dispose les participants en file indienne. On coiffe chacun d'un chapeau rouge, vert ou bleu, de sorte qu'il ne voit la couleur que des chapeaux de ses coéquipiers situés devant lui. Il ne connaît donc pas la couleur de son chapeau. Il peut y avoir un nombre arbitraire de chapeaux rouges, verts ou bleus.

L'un après l'autre, en commençant par celui qui est en fin de file, les participants doivent annoncer une couleur. L'équipe marque 1 point si la couleur annoncée par le participant est bien celle de son chapeau.

Quel total de points peut être obtenu au maximum ?