Licence FONDNATEXP, UE Maths 305

Droites remarquables et cocyclicité (l)

Exercice l.1 *La première chose importante pour cet exercice est de savoir que si on appelle H le projeté orthogonal de B sur (MA) alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MH}$. La deuxième c'est de trouver les droites importantes de l'exercice, qui sont les droites (AH) et (BC) perpendiculaires entre elles, ce qui est utile quand on calcule des produits scalaires...*

(1) Démontrons que si M appartient à $\mathcal{H}_A$ on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$. Soit H le pied de la hauteur $\mathcal{H}_A$, donc $\mathcal{H}_A = (AH)$. Choisissons un sens positif pour les mesures algébriques sur la droite (AH), alors si $M \in \mathcal{H}_A$ on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MH}$$

et de même $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overline{MA}.\overline{MH}$. Donc les deux produits scalaires sont égaux.

Montrons maintenant que si M est dans le demi-plan délimité par $\mathcal{H}_A$ et contenant B, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} < \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$. On passe par les deux droites (AH) et (BC), précisément, appelons N le projeté orthogonal de M sur (AH) et P son projeté orthogonal sur (BC). Alors

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}).(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PB})$$

(*si vous voulez chercher un peu, arrêtez-vous ici de lire ce corrigé et continuez tout(e) seul(e) !*)

Développons ce produit scalaire :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \underbrace{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}_{=0} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MP} + \underbrace{\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{PB}}_{=0}$$

De même on calcule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MP}$. Donc pour montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} < \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ il suffit de montrer que $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PB} < \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PC}$. Si B est entre P et H, on a $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PB} = \overline{MN}.\overline{PB} < \overline{MN}.\overline{PC} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PC}$. Si P est entre B et H c'est similaire. Donc on a démontré ce qu'on voulait.

Par symétrie, si M est dans le demi-plan délimité par $\mathcal{H}_A$ et contenant C, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} > \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$. En conclusion l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ est la hauteur issue de A. Une caractérisation semblable a lieu pour les hauteurs issues de B et de C.

(2) Montrons à l'aide de (1) que les hauteurs de ABC sont concourantes. Soit T le point d'intersection de la hauteur issue de A et de celle issue de B. D'après (1) on a donc

$$\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{TB}.\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TB}.\overrightarrow{TC}$$

On en déduit que $\overrightarrow{TC}.\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TC}.\overrightarrow{TB}$, c'est-à-dire que T est sur la hauteur issue de C. Donc les hauteurs sont concourantes en T.

Exercice l.2 (1) Soit M' le point du cercle diamétralement opposé à M. Le triangle OAM est isocèle, donc les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM})$ sont égaux (modulo 2π). La somme des angles d'un triangle étant égale à π on a :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = \pi \ (2\pi)$$

Comme par ailleurs $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi \ (2\pi)$, on en déduit :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) \ (2\pi)$$

Avec un raisonnement analogue, en remplaçant A par B, on obtient :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM'}) \ (2\pi)$$

En utilisant la relation de Chasles, on en tire

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) - 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM'}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \ (2\pi)$$

(2) L'égalité $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \ (2\pi)$ veut dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + 2k\pi$. En divisant par 2 on a $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) - k\pi = \theta - k\pi$ donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta \ (\pi)$.

Exercice l.3 (1) Construisons un cercle comme celui de l'exercice précédent. Traçons I le milieu de $[AB]$, puis $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AB]$. D'après l'exercice précédent, le centre O est sur $\mathcal{D}$ (donc le triangle OAB est isocèle) et vérifie $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\theta \ (2\pi)$. En particulier, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \theta \ (\pi)$.

Si on trace une droite passant par A et faisant avec (AB) un angle égal à $\pi/2 - \theta$, d'après la condition $\theta \neq 0 \ (\pi)$ elle va croiser $\mathcal{D}$ en un unique point que nous appelons O. D'après l'exercice précédent, le cercle de centre O et de rayon OA répond à la question.

(2) On veut maintenant montrer que les seuls points tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta \ (\pi)$ sont ceux de $\mathcal{C}$ privé de A et B. Soit M un tel point, et soit N l'intersection de (AM) avec $\mathcal{C}$: on a donc $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \theta \ (\pi)$. Si $N \neq M$, on a $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) \neq (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) \ (\pi)$ (deuxième cas d'égalité des triangles). Or comme la somme des angles d'un triangle est π, ceci est en contradiction avec

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) \ (\pi) \quad &&(\text{puisque } N \in (AB)) \\ \text{et} \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) &= (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \theta \ (\pi) \quad &&(\text{puisque } N \in \mathcal{C}) \end{aligned}$$

Par l'absurde, on a donc $N = M$, donc $M \in \mathcal{C}$.

(3) Soient $M \neq A, B$ et $N \neq A, B$. Il s'agit de montrer que « $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \ (\pi)$ si et seulement si A, B, M, N sont cocycliques ou alignés ». Distinguons deux cas selon la valeur de $\theta := (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$.

Dans le cas où $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \neq 0 \ (\pi)$, dans les questions (1) et (2) on a construit un cercle $\mathcal{C}$, contenant N, tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \ (\pi)$ si et seulement si $M \in \mathcal{C} \backslash \{A, B\}$. On voit qu'en fait ce cercle est le cercle circonscrit au triangle ABN, donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \ (\pi)$ si et seulement si A, B, M, N sont cocycliques.

Dans le cas où $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = 0\ (\pi)$, ce qui signifie que $N \in (AB)$, on a

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})\ (\pi) \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi) \iff M \in (AB) \iff A, B, M, N \text{ alignés}$$

Ceci conclut la démonstration de la condition de cocyclicité.

Notons $\mathcal{E}_\theta$ l'ensemble des points tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta\ (2\pi)$ – donc $\mathcal{E}_{\theta+\pi}$ est l'ensemble des points tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta + \pi\ (2\pi)$. Dans le cas $\theta \neq 0\ (\pi)$, $\mathcal{E}_\theta$ est celui des deux arcs du cercle $\mathcal{C}$ (construit ci-dessus) qui contient M, et $\mathcal{E}_{\theta+\pi}$ est l'autre arc. Lorsque $\theta = 0\ (\pi)$, $\mathcal{E}_\theta$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$, et $\mathcal{E}_{\theta+\pi}$ est le segment ouvert $]AB[$.

Exercice I.4 On va d'abord construire le cercle ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta\ (\pi)$. En effet, d'après l'énoncé, le point C doit être dessus. Pour cela on trace la médiatrice de $[AB]$ puis la droite passant par A et faisant avec (AB) un angle égal à $\pi/2 - \theta$. L'intersection de ces deux droites est un point O. On trace le cercle de centre O et de rayon OA, puis le cercle de centre B et de rayon ℓ. Ces cercles ont deux points d'intersection : l'un est B et l'autre est un point qui est le point C recherché.

Exercice I.5 (1) Par construction des hauteurs, on a modulo π :

$$(\overrightarrow{A^\circ A}, \overrightarrow{A^\circ B}) = \pi/2 = (\overrightarrow{B^\circ A}, \overrightarrow{B^\circ B})\ (\pi)$$

D'après la condition de cocyclicité, A, B, A°, B° sont cocycliques ou alignés. Comme ils ne sont pas alignés (on suppose qu'on est parti d'un triangle non plat...), ils sont cocycliques. Le même raisonnement fonctionne pour les autres quadruplets de points.

(2) Démontrons que la hauteur issue de A est une bissectrice de $A^\circ B^\circ C^\circ$; les autres cas sont similaires. Pour cela il suffit de montrer que $(\overrightarrow{A^\circ C^\circ}, \overrightarrow{A^\circ A}) = (\overrightarrow{A^\circ A}, \overrightarrow{A^\circ B^\circ})\ (\pi)$. Or, modulo π,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{A^\circ C^\circ}, \overrightarrow{A^\circ A}) &= (\overrightarrow{CC^\circ}, \overrightarrow{CA}) && \text{(car } A,\ C,\ A^\circ,\ C^\circ \text{ sont cocycliques)}\\
&= (\overrightarrow{CC^\circ}, \overrightarrow{CB^\circ}) && \text{(car } \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CB^\circ} \text{ définissent la même droite)}\\
&= (\overrightarrow{BC^\circ}, \overrightarrow{BB^\circ}) && \text{(car } B,\ C,\ B^\circ,\ C^\circ \text{ sont cocycliques)}\\
&= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB^\circ}) && \text{(car } \overrightarrow{BC^\circ} \text{ et } \overrightarrow{BA} \text{ définissent la même droite)}\\
&= (\overrightarrow{A^\circ A}, \overrightarrow{A^\circ B^\circ}) && \text{(car } A,\ B,\ A^\circ,\ B^\circ \text{ sont cocycliques)}
\end{aligned}$$

C'est bien ce qu'on voulait. Pour faire un dessin montrant que ce ne sont pas forcément les bissectrices intérieures, faites un triangle très aplati de sorte que le pied d'une hauteur ne soit pas dans le triangle...