Cas d'égalité des triangles (k)

Exercice k.2

(1) On a $AD = A'C'$, et $AB = A'B'$, et $\alpha = \alpha'$, donc par le premier cas d'égalité des triangles, les triangles ABD et $A'B'C'$ sont isométriques.

(2) Comme ABD et $A'B'C'$ sont isométriques (question (1)), on a $\widehat{ABD} = \widehat{A'B'C'} = \beta' = \beta$ par hypothèse. De plus les points C et D sont du même côté de la droite (AB). Donc la partie « unicité » de l'axiome A nous montre que $[BC) = [BD)$, c'est-à-dire, D appartient à la demi-droite $[BC)$.

(3) Par construction, $D \in (AC)$. Par ailleurs, on a montré que $D \in (BC)$. Donc D appartient à l'intersection $(AC) \cap (BC)$, c'est-à-dire $D = C$. Il s'ensuit que $ABC = ABD$, donc ABC et $A'B'C'$ sont isométriques d'après la question (1).

Exercice k.3

(1) Non : on sait bien que les parallélogrammes sont « déformables ». Par exemple, il existe des losanges qui ne sont pas carrés : donc si $ABCD$ est un tel losange de côté c, et $A'B'C'D'$ est le carré de côté c, alors ces deux quadrilatères ne sont pas isométriques et donc ne peuvent pas vérifier de « cas d'égalité ».

(2) Puisqu'on ne peut pas pour $n = 4$, pour $n \geq 4$ on pourra encore moins ! Pour $n = 4$ on vient de donner un contre-exemple. Quand $n \geq 5$, pour dessiner un polygone à n côtés qui est un contre-exemple au « cas d'égalité », on concentre le dessin sur quatre côtés successifs du polygone et on observe qu'on peut « faire bouger » ces quatre côtés, un peu comme dans le cas du losange.

(3) Si les quatre côtés sont égaux deux à deux et $AC = A'C'$, alors ABC et $A'B'C'$ sont isométriques, c'est-à-dire qu'il existe une isométrie u qui envoie ABC sur $A'B'C'$. Posons $E = u(D)$. Alors d'après les propriétés d'une isométrie, on a $A'E = AD = A'D'$ et $C'E = CD = C'D'$ et donc $A'C'E$ et $A'C'D'$ sont isométriques. D'après une autre propriété d'une isométrie, comme D et B sont situés de part et d'autre de (AC), alors $u(D) = E$ et B' sont situés de part et d'autre de $(A'C')$. Donc E et D' sont situés du même côté de $(A'C')$, et finalement $E = D'$. Cela signifie que u envoie $ABCD$ sur $A'B'C'D'$, i.e. les deux quadrilatères sont isométriques.

(4) Soient $ABCDE$ et $A'B'C'D'E'$ deux polygones convexes à 5 côtés. Alors, s'ils ont leurs côtés successifs égaux deux à deux et si de plus $AC = A'C'$ et $AD = A'D'$, alors les deux polygones sont isométriques. Pour 6 côtés on peut demander par exemple que $AC = A'C'$, $AD = A'D'$, et $AE = A'E'$... Il est probable que d'autres choix de trois diagonales conviennent aussi...