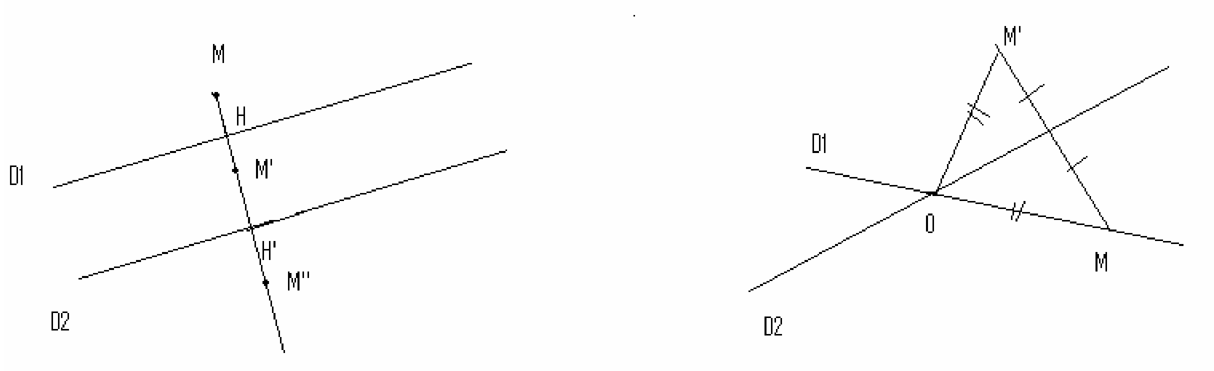
Licence FONDNATEXP – MathLG 308

Feuille (j) corrigés des exercices

Exercice i.1 (1) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles, s_1 et s_2 les réflexions par rapport à ces droites. Qu'est-ce que l'isométrie $t := s_2 \circ s_1$? Donnez ses éléments caractéristiques.

(2) Mêmes questions si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites sécantes.



1. Cas où les droites sont parallèles.

Les réflexions sont des anti-déplacements, la composée de deux anti-déplacements est un anti-déplacement donc la composée est une rotation ou une translation. Pour déterminer s'il s'agit d'une translations ou d'une rotation, on cherche s'il y a des points fixes.

Si P est un point fixe de $s_2 \circ s_1$, alors $s_2 \circ s_1(P) = P$. Soit en composant à gauche avec s_2, $s_2 \circ s_2 \circ s_1(P) = s_2(P)$. Or, $s_2 \circ s_2 = Id$ donc $s_1(P) = s_2(P)$ mais D_1 est la médiatrice de $[Ms_1(M)]$ et D_2 est la médiatrice de $[Ms_2(M)]$ donc D_1 et D_2 sont confondues.

On a donc 2 cas : si les droites sont confondues alors la composées des réflexions est l'identité. Si les droites sont parallèles et distinctes alors la composée est une translation car c'est un déplacement sans point fixe. Le vecteur de la translation est perpendiculaire aux droites et vaut : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'} = 2\overrightarrow{HH'}$.

Réciproquement, toute translation de vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes parallèles, perpendiculaires à $\vec{u}$ et distants de la moitié de la longueur de $\vec{u}$.

2. Si les droites sont sécantes en O. Le point O est fixe par la composée des deux réflexions puisqu'il est fixe par chaque réflexion. Donc la composée est une rotation. L'angle de cette rotation est $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$. Or, O est sur la médiatrice de $[MM']$ donc $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 2\left(D_1, D_2\right)$. Les angles de droites sont définis modulo π, comme on prend le double on trouve bien un angle défini modulo 2π.

Ainsi, la composée de deux réflexions d'axe sécants est une rotation de centre l'intersection des axes et d'angle le double de celui formé par les axes.

Réciproquement, toute rotation de centre O peut s'écrire comme composée de réflexions d'axes sécants en O, le premier arbitraire (mais passant par O) et le second faisant avec le premier un angle moitié de celui de la réflexion. Ceci sera utile dans l'exercice 4.

Exercice i.2 Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$, H le pied de la hauteur issue de A, et O le point d'intersection de (IJ) avec (AH). Pour chaque point M du plan, on considère son image M^* par la symétrie centrale de centre O, puis l'image M' de M^* par la réflexion d'axe (BC). On souhaite étudier l'isométrie s ainsi définie par $s(M) = M'$.

(1) L'isométrie s préserve-t-elle l'orientation ?

(2) A-t-elle des points fixes ? (*Indic : montrez que si M est un point fixe, la médiatrice de $[MM^*]$ doit d'une part contenir O, d'autre part être égale à (BC). Aboutir à une contradiction.*)

(3) Quelle est la nature de s ? (*Utilisez la classification des isométries.*)

(4) On écrit s sous la forme $s = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$ où $\vec{v}$ et $\mathcal{D}$ sont à déterminer (les notations sont celles du cours, au paragraphe sur les isométries). Comment trouver $\vec{v}$?
(*Indic : comparez $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{v}}$, et calculez $s \circ s$.*)

(5) Comment ensuite déterminer $\mathcal{D}$?

1) On étudie la composée d'une symétrie centrale (rotation d'angle π) et d'une réflexion axiale donc d'un déplacement et d'un anti-déplacement. Cette composée est un anti-déplacement donc ne préserve pas les angles orientés.
2) Supposons que M est un point fixe, alors $M'=M$. Puisque M^*est l'image de M dans la symétrie de centre O, le point O est le milieu de $[MM^*]$. Puisque, M est l'image de M^* dans la réflexion d'axe (BC), la droite BC est la médiatrice de $[MM^*]$. Donc O est sur BC ce qui n'est pas le cas, donc la composée n'a pas de point fixe.
3) La composée est donc une symétrie glissée qui s'écrit sous la forme $s = t_{\vec{v}} \circ s_D$ où la droite D et le vecteur $\vec{v}$ ont même direction. Comme ils ont même direction leur composée commute c'est-à-dire que $t_{\vec{v}} \circ s_D = s_D \circ t_{\vec{v}}$. Pour trouver $\vec{v}$, il suffit donc d'effectuer deux fois s car $s \circ s = t_{\vec{v}} \circ s_D \circ s_D \circ t_{\vec{v}} = t_{\overrightarrow{2v}}$.

Cherchons l'image de O par $s \circ s$.

$s(O) = s_{BC} \circ s_O(O) = s_{BC}(O) = O'$ avec $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OH}$.

Et $s(O') = s_{BC} \circ s_O(O') = s_{BC}(O_1)$ avec $\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OH}$

$s_{BC}(O_1) = O_2$ avec $\overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{HO_2}$

Et $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HO_2} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OH}$ donc $\vec{v} = 2\overrightarrow{OH}$.

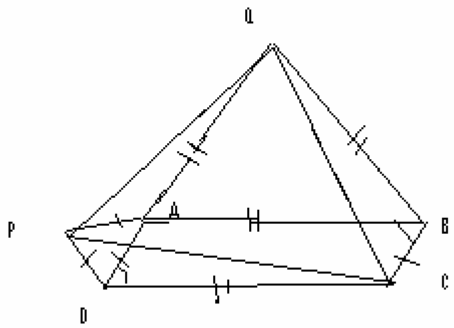
4) On sait que D et $\vec{v}$ sont de même direction et en regardant toujours l'image de O :
$s(O) = s_D \circ t_{\vec{v}}(O) = O' = s_D(O')$. Donc la droite D est la droite (OH) car elle passe par O' puisqu'il est fixe par s_D et elle a même direction que (OH).

Ainsi s est la symétrie glissée de vecteur $2\overrightarrow{OH}$ et d'axe (OH).

Exercice i.3 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ soit un angle positif. On construit, à l'extérieur de $ABCD$, les triangles équilatéraux ADP et ABQ.

(1) Montrez que PQC est équilatéral.

(2) On considère l'isométrie qui transforme le triangle PDC en CBQ. Quelle est sa nature, quels sont ses éléments caractéristiques ? Pour répondre, décrivez cette isométrie comme composée de deux isométries r et t.



1) Les triangles PDC et CBQ sont égaux. En effet, ils ont 2 côtés égaux $PQ=AB=DC$ et $PD=AD=BC$. Les angles compris entre ces deux côtés sont égaux car ils valent chacun la somme de $\pi/3$ (angle d'un triangle équilatéral) et des angles du parallélogramme $\widehat{ADC}$ et $\widehat{CBA}$ (égaux en considérant la symétrie de centre le centre du parallélogramme). Donc les triangles sont égaux et leur troisième côté ont donc même dimension $QC=PQ$.
On montre de même que $PC=PQ$, en remarquant que les triangles PDC et PAQ sont égaux. Le triangle PQC est donc équilatéral.
2) Une isométrie est déterminée de manière unique par l'image de 3 points non alignés. Les triangles PDC et CBQ sont isométriques, il existe bien une unique isométrie f telle que $f(P)=C \quad f(D)=B \quad f(C)=Q$. Les angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{PD},\overrightarrow{PC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CQ}\right)$ sont égaux f conserve les angles orientés c'est donc un déplacement c'est-à-dire une translation ou une rotation.
Soit r la rotation de centre P et de mesure d'angle $\pi/3$, $r(P)=P$ $r(D)=A$ et $r(C)=Q$ car les triangles PDA et PCQ sont équilatéraux.
Soit r' la rotation de centre Q et de mesure d'angle $\pi/3$, $r'(P)=C$, $r'(A)=B$ et $r'(Q)=Q$. car les triangles QAB et PCQ sont équilatéraux.
L'isométrie f cherchée est la composée $r'\circ r$, c'est donc une rotation de mesure d'angle $2\pi/3$ son centre est à l'intersection des médiatrices d'un point et de son image donc à l'intersection des médiatrices de $[PC]$ et $[CQ]$. Le centre est le centre de gravité du triangle équilatéral QPC.

Exercice i.4 Pour vérifier que le phénomène qui se produit dans l'exercice i.2 est général :

(1) Montrez que la composée d'une symétrie centrale et d'une réflexion est une symétrie glissée.

(2) Montrez qu'une symétrie glissée est la composée d'une symétrie centrale et d'une réflexion.

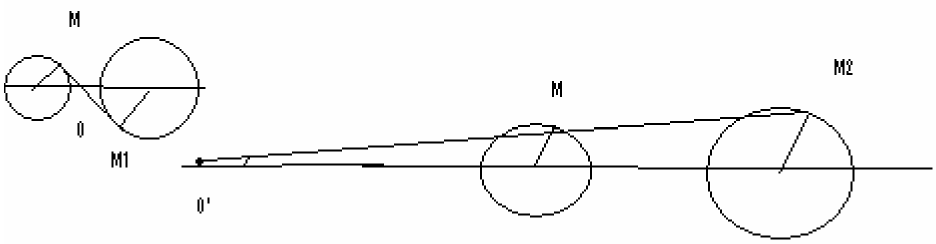
1) Soit s_O une symétrie centrale de centre O et s_D une réflexion d'axe D. Cherchons à caractériser leurs composées : $s_O\circ s_D$ et $s_D\circ s_O$.
Une symétrie centrale de centre O est une rotation de centre O d'angle plat. La composée d'une rotation et d'une réflexion est un antidéplacement c'est donc soit une réflexion soit une symétrie glissée.
Décomposons la symétrie centrale en deux réflexions d'axes D_1 et D_2 perpendiculaires sécants en O, le premier axe étant parallèle à D. Alors :
$s_O\circ s_D = s_{D2}\circ s_{D1}\circ s_D = s_{D2}\circ t_{\vec{u}}$ et $s_D\circ s_O = s_D\circ s_{D1}\circ s_{D2} = t_{\vec{v}}\circ s_{D2}$.
D'après le premier exercice, on sait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires à D donc parallèle à D_2. On a donc bien une symétrie glissée déterminée par ses éléments caractéristiques.

Remarquons que si O est sur D, alors les droites D_1 et D sont confondues et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls. La composée est une réflexion d'axe D_2 (perpendiculaire à D passant par O).
2) Soit, réciproquement, une symétrie glissée donnée par ses éléments caractéristiques $s = s_D \circ t_{\vec{u}}$, la droite D et le vecteur $\vec{u}$ étant parallèles. Décomposons la translation en deux réflexions d'axes parallèles entre eux D_1 et D_2 et perpendiculaires à $\vec{u}$. Alors, $s = s_D \circ t_{\vec{u}} = s_D \circ s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ = s_O \circ s_{D_2}$ où O est l'intersection des deux axes perpendiculaires D et D_1.

Exercice i.5 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres A et A' et de rayons non nuls r et r'. Montrez qu'il existe deux homothéties/translations qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

On sait qu'une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$. Il y a donc deux rapports possibles pour l'homothétie cherchée : r'/r et $-r'/r$.
Par ailleurs, l'image de A doit être A'. Le centre de l'homothétie, un point et son image étant toujours alignés, le centre O de l'homothétie est sur la droite (AA').
Réciproquement, une homothétie de rapport r'/r ou $-r'/r$ et transformant A en A' convient.

Il y a donc 2 homothéties translation répondant à la question. Remarquons que si les rayons sont les mêmes il y a une translation et une homothétie de rapport -1 et de centre le milieu de $[AA']$.
Pour déterminer le centre O on peut écrire vectoriellement que l'image de A est A'. On peut aussi faire la construction géométrique suivante :



soit M un point du cercle de centre A et M' son image. Comme les homothéties transforme une droite en une droite parallèle, il y a deux possibilités pour M' : M_1 ou M_2. Comme le centre, un point et son image son alignés, le centre cherché est l'intersection des droites (AA') et (OM')