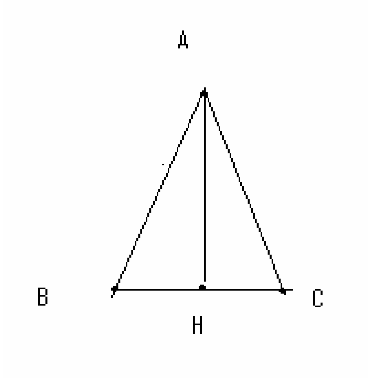
Licence FONDNATEXP – MathLG 308

Feuille (i) corrigés des exercices

Exercice i.1

- ***a)*** *Soit un triangle ABC isocèle en A, on nomme a et b les longueurs respectives des côtés BC et AB. Exprimer en fonction de a et b la longueur de la hauteur AH.*
- ***b)*** *Exprimer la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur a d'un côté.*
- ***c)*** *Compléter le tableau*
- ***d)*** *Comment faire pour partager une tarte en 6 parts égales ?*

Il s'agit d'exercices de trigonométrie élémentaire



a) Le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle *AHC* donne

$$AH^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{4} = b^2 - \frac{a^2}{4}.$$

b) C'est la même démarche avec *b*=*a* donc $AH^2 = \frac{3a^2}{4}$ et $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) En raisonnant toujours dans le triangle *AHC,* on a

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{HC}{AC} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \sin\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tandis qu'en raisonnant dans un triangle rectangle isocèle de longueur de côté de l'angle droit 1. Le théorème de Pythagore donne $\sqrt{2}$ pour longueur de l'hypoténuse, on en déduit que

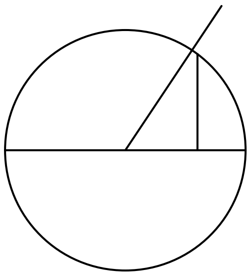
$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les formules trigonométriques permettent de calculer $\cos(\pi/6)$ en fonction des cosinus et sinus de $\pi/2$ et $\pi/3$.

Ce qui permet de compléter le tableau

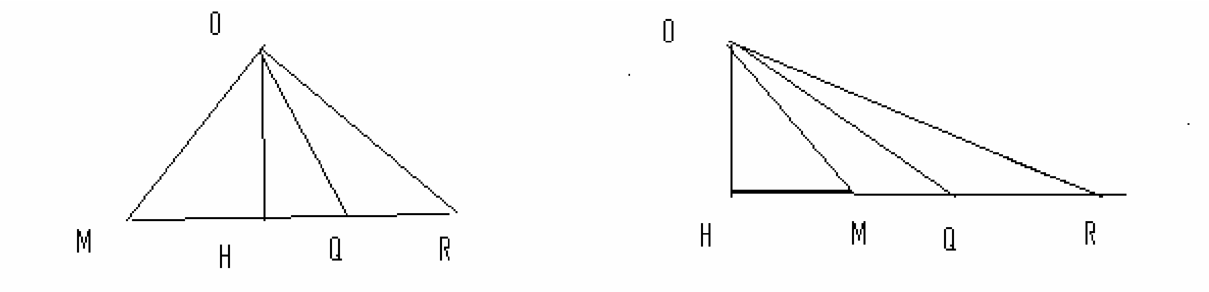
	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	4π/3	3 π/2	2π
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-\sqrt{3}/2$	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	-1/2	0	1
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Pas def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	Pas def.	0

d) On se sert de $\cos\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$



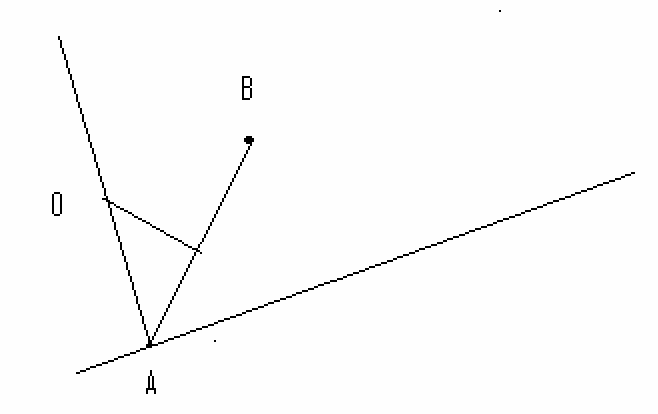
Exercice i.2 *Montrer qu'un disque est une partie convexe*

Le disque fermé de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM \leq r$.
Soit M et R deux points du disque, et Q un point du segment $[MR]$, il faut montrer que Q est également dans le disque.
Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite MR. Comme Q est sur le segment $[MR]$ on a toujours $HQ \leq HM$ ou $HQ \leq HR$, que H soit ou non sur le segment $[MR]$



En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles OHQ et OHM ou OHR, il vient $OQ \leq r$. Le point Q est donc dans le disque.

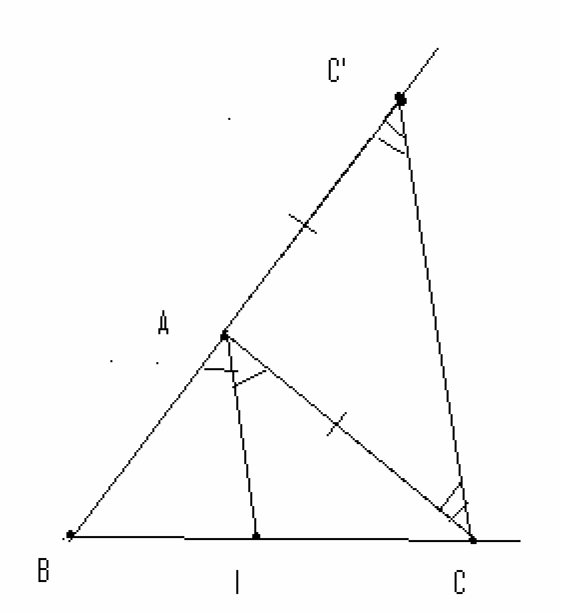
Exercice i.3 *Soit une droite D, A un point de D et B un point n'appartenant pas à D. Montrer qu'il existe un unique cercle tangent à D en A et passant par B.*



Si un tel cercle existe alors comme A et B sont sur le cercle, le centre O étant situé à égale distance de A et B, il est situé sur la médiatrice de $[A, B]$. De plus si le cercle est tangent en A à la droite D c'est que le rayon AO et la droite D sont perpendiculaires. Le point O, s'il existe, est donc situé à l'intersection de la médiatrice de $[A, B]$ et de la perpendiculaire à D passant pas A. Ces deux droites ne sont pas parallèles car leur perpendiculaire (AB) et D sont sécantes. Donc un tel point O existe et est unique.

Réciproquement soit O défini comme ci-dessus, alors le cercle de centre O et de rayon OA convient en effet il passe bien par A et B et il est tangent en A à D.

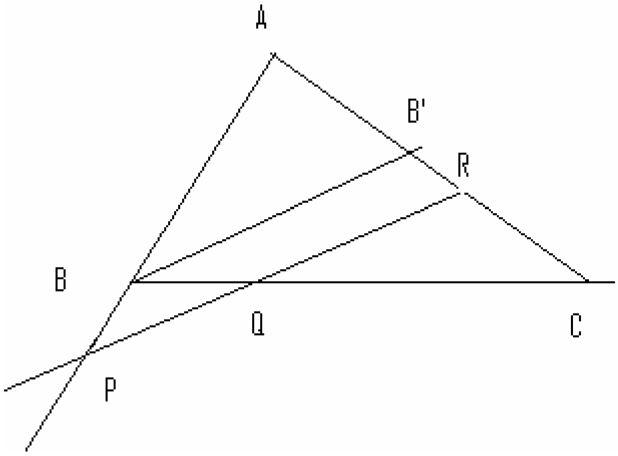
Exercice i.4 *Soit un triangle ABC. La bissectrice intérieure de l'angle en A coupe BC en I .*
Soit C' le point de la demi droite $\left[BA\right)$ *tel que AC'=AC.*
1° Montrer que les droites (CC') et (AI) sont parallèles.
2° En déduire que $\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{AB}{AC}$.



1°) La bissectrice de l'angle en A est AI on a donc l'égalité des angles géométriques (c'est-à-dire non orientés) $\widehat{BAI}=\widehat{IAC}$. Les points B, A, et C' sont alignés donc $\pi=2\widehat{BAI}+\widehat{CAC'}$.
Le triangle ACC' est isocèle donc $\widehat{ACC'}=\widehat{AC'C}$. La somme des angles d'un triangle est un angle plat donc $\pi=2\widehat{AC'C}+\widehat{CAC'}$.
De ces deux égalités, il vient : $\widehat{BAI}=\widehat{AC'C}$. Les droites (CC') et (AI) sont parallèles puisqu'elles forment des angles égaux avec la droite (AB)
2°) D'après le théorème de Thalès $\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{AB}{AC'}$ et comme $AC=AC'$, on a aussi $\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Exercice i.5 ***Théorème de Ménalaüs*** *soient trois points P, Q, R pris sur les droites portant les côtés d'un triangle non aplati (A, B, C) , (P* $\in$*(AB), Q*$\in$*(BC) et R* $\in$*(AC)) Montrer l'équivalence suivante :*

$$P,\ Q,\ R \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}=1$$



- Si *P*, *Q*, *R* sont alignés sur une droite *D* , projetons sur (*AC*) parallèlement à *D*, les points *A*,*B*, *P* alors $A \to A$, $B \to B'$ et $P \to R$.

D'après le théorème de Thalès

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{RB'}}{\overline{RC}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB'}}\frac{\overline{RB'}}{\overline{RC}}\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$$

- Réciproquement, montrons d'abord que les droites (*PQ*) et (*AC*) sont sécantes. Si elles étaient parallèles alors, d'après le théorème de Thalès, $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$ mais alors

  $\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$ ce qui est impossible car *A* et *C* sont distincts.

Soit *M* l'intersection de (*PQ*) et (*AC*), *P*,*Q* et *M* sont alignés donc d'après la première partie $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$ donc $\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}$ donc *M* et *R* sont confondus d'où le résultat.