Nombres premiers (h)

Exercice h.1 (4) On a $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$ et 6700417 est premier. Il faut le faire avec un programme sur ordinateur (ma calculatrice a mis plusieurs minutes à repondre).

Exercice h.4 (1) Pour tout i tel que $2 \leq i \leq n$, le nombre $n! + i$ est divisible par i, puisque $n!$ est divisible par i.

(2) La suite n'est pas bornée, et pour le montrer il faut trouver deux nombres premiers successifs p_{k-1} et p_k arbitrairement loin l'un de l'autre (ce qui veut dire, étant donné n il faut trouver p_{k-1} et p_k distants de n au moins). Or, on a vu à la question précédente que $n! + 2$,... $n! + n$ est une plage de $n - 1$ entiers consécutifs qui sont tous composés. Donc la suite de terme $p_k - p_{k-1}$ n'est pas bornée.

Exercice h.5 On peut calculer la DFP de $100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100$ (c'est un peu long) mais on n'a pas besoin de connaître tous les facteurs : seuls les 2 et les 5 contribuent à faire apparaître des zéros dans l'écriture décimale ! Il est clair que l'exposant de 2 dans la DFP de 100! sera (beaucoup) plus grand que celui de 5, car tous les nombres pairs entre 1 et 100 contribuent à fournir des 2. On va donc se limiter à compter les 5. Il y a un facteur 5 dans 5, 10, 15, 20,..., 100. Attention : dans 25, 50, 75 et 100 on a un exposant 2. La réponse finale est 22.

Exercice h.6 (1) Écrivez les DFP de a, b, c puis celles de pgcd(pgcd(., .).). Inspirez-vous du dernier paragraphe du cours.

(2) et (3) La réponse est non à chaque fois. Il faut donner des contre-exemples !

Exercice h.7 (2) Il faut utiliser la DFP de tous les nombres en jeu, et bien exprimer le fait que les a_i sont premiers entre eux (cf ex. f.3). (Dans le cas $n = 2$ on a seulement a_1, a_2).

(3) Non : un contre-exemple évident est donné par $a = b$, auquel cas ils ne sont pas premiers entre eux (!) et $ab = a^2$ est un carré. (On peut prendre $a = b = 5$ par exemple).