pgcd et ppcm (g)

Exercice g.4 (a) $(-2) \times n + (2n + 1) = 1$ donc d'après le th. de Bézout les nombres n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

(b) En étant un peu astucieux on trouve directement une relation de Bézout : $5 \times (7n + 3) - 7 \times (5n + 2) = 1$ donc les deux nombres sont premiers entre eux.

On aurait pu aussi appliquer l'algorithme d'Euclide. Je suppose d'abord que $n > 1$:

$$\begin{array}{ll} 7n + 3 = 5n + 2 + (2n + 1) & \text{avec } 0 \leq 2n + 1 < 5n + 2 \\ 5n + 2 = 2 \times (2n + 1) + n & \text{avec } 0 \leq n < 2n + 1 \\ 2n + 1 = 2 \times n + 1 & \text{avec } 0 \leq 1 < n \end{array}$$

Ceci montre que $\mathrm{pgcd}(7n+3, 5n+2) = 1$. Si $n = 1$ les nombres sont $7n+3 = 10$ et $5n+2 = 7$, qui sont premiers entre eux.

Exercice g.5 Soit $n \in \mathbb{Z}$. On sait qu'il existe un couple (λ_0, μ_0), par exemple donné par l'algorithme d'Euclide, tel que $1 = \lambda_0 a + \mu_0 b$. En multipliant par n on obtient $n = n\lambda_0 a + n\mu_0 b$. On voudrait de plus que le coefficient devant a soit entre 0 et $b - 1$... Pour cela, il suffit de faire la division euclidienne de $n\lambda_0$ par b :

$$n\lambda_0 = qb + \lambda$$

avec $0 \leq \lambda < b$. On a alors $n = (qb + \lambda)a + n\mu_0 b = \lambda a + qab + n\mu_0 b = \lambda a + (qa + n\mu_0)b =$ donc on obtient l'écriture souhaitée en prenant $\mu = qa + n\mu_0$.

Pour démontrer que le couple trouvé est le seul vérifiant les propriétés indiquées, relisez la fin de la preuve du théorème de division euclidienne, et adaptez-la...

Exercice g.7 (1) On a vu qu'en ajoutant à λ un multiple de b, on peut le « faire passer » du côté de μ pour obtenir un autre couple :

$$\lambda a + \mu b = (\lambda + kb)a - kba + \mu b = (\underbrace{\lambda + kb}_{\lambda'})a + (\underbrace{\mu - ka}_{\mu'})b$$

et on a un nouveau couple (λ', μ'). Donnons un exemple plus concret : pour $a = 5$ et $b = 7$ on peut donner plusieurs relations de Bézout

$$1 = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 10 \times 5 - 7 \times 7$$

Ici $\lambda = 3$ et $\mu = -2$, j'ai pris $k = 1$, donc $\lambda' = 3 + 7$ et $\mu' = -2 - 5$.

(2) On a $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux. Si on a deux couples de Bézout (λ_0, μ_0) et (λ, μ), alors

$$d = \lambda_0 a + \mu_0 b = \lambda a + \mu b$$

donc $(\lambda - \lambda_0)a = (\mu_0 - \mu)b$. En simplifiant par d on obtient $(\lambda - \lambda_0)a' = (\mu_0 - \mu)b'$. Il s'ensuit que b' divise $(\lambda - \lambda_0)a'$, et comme a' et b' sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, b' divise $\lambda - \lambda_0$. De même on obtient d'ailleurs que a' divise $\mu_0 - \mu$.

(3) D'après la question précédente il existe des entiers $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que $\lambda - \lambda_0 = kb'$ et $\mu_0 - \mu = \ell a'$. On remplace dans l'égalité $(\lambda - \lambda_0)a' = (\mu_0 - \mu)b'$, il vient : $kb'a' = \ell a'b'$. Donc $k = \ell$. En conclusion $\mu = \mu_0 - ka'$ et $\lambda = \lambda_0 + kb'$.

Pour finir, il faut vérifier que si (λ_0, μ_0) est un couple de Bézout, le nouveau couple défini par $\lambda = \lambda_0 + kb'$ et $\mu = \mu_0 - ka'$ est aussi un couple de Bézout pour a et b :

$$\lambda a + \mu b = (\lambda_0 + kb')a + (\mu_0 - ka')b = (\lambda_0 a + \mu_0 b) + kb'a - ka'b = \lambda_0 a + \mu_0 b = d$$

(noter que $a'b = da'b' = ab'$). Donc on a trouvé ainsi tous les couples de Bézout pour a et b.

Exercice g.9 Cet exercice est difficile. Suivons les indications données. Posons $g_1(x) = f(x) + 21^2 f''(x)$ et $g_2(x) = f(x) + 35^2 f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f. On a (attention aux signes !) :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\tfrac{1}{21}\sin\tfrac{x}{21} - \tfrac{1}{35}\sin\tfrac{x}{35}\\
f''(x) &= -\left(\tfrac{1}{21}\right)^2\cos\tfrac{x}{21} - \left(\tfrac{1}{35}\right)^2\cos\tfrac{x}{35}\\
g_1(x) &= -\left(\tfrac{21}{35}\right)^2\cos\tfrac{x}{35}\\
g_2(x) &= -\left(\tfrac{35}{21}\right)^2\cos\tfrac{x}{21}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si T est une période pour f c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, alors en dérivant deux fois on voit que c'est aussi une période pour f'' : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x+T) = f''(x)$. De même en faisant des sommes on voit que T est une période pour g_1 et g_2.

Or on sait que la plus petite période de $\cos(x)$ est 2π donc la plus petite période de g_1 est $21 \times 2\pi$. De même la plus petite période de g_1 est $35 \times 2\pi$. Donc, T doit être un multiple de ces nombres. Comme $\mathrm{ppcm}(21, 35) = 21 \times 35/7 = 105$ (calculé en utilisant $\mathrm{pgcd}(a, b) \times \mathrm{ppcm}(a, b) = ab$), alors T doit être un multiple de $105 \times 2\pi = 210\pi$. Comme 210π est une période de f (évident), alors c'est la plus petite.