Corrigé de l'examen de Maths du 1er semestre

Exercice 1 1. En appliquant l'algorithme d'Euclide, on calcule ainsi le pgcd de 69 et 115 :

$$\begin{array}{ll} 115 = 1 \times 69 + 46 & (0 \leqslant 46 < 69) \\ 69 = 1 \times 46 + 23 & (0 \leqslant 23 < 46) \\ 46 = 2 \times 23 + 0 & (0 \leqslant 0 < 23) \end{array}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul, c'est 23. Par conséquent, lorsqu'on utilise les deux récipients pour remplir la carafe, on ne peut verser que des volumes multiples de 23 ml. Or, par division euclidienne, $1475 = 64 \times 23 + 3$ avec $0 \leqslant 3 < 23$. Ceci montre que 1475 n'est pas divisible par 23, donc on ne peut pas remplir la carafe entièrement. Le volume maximal qu'on peut verser dans la carafe est $V = 1472$ ml.

2. Une première façon de faire est de prendre $x = 0$, $x = 1$,..., $x = 22$ et pour chacune de ces valeurs regarder s'il y a un y qui convient. On peut aussi, c'est plus rapide, prendre $y = 0$, $y = 1$,..., $y = 13$ et pour chacun regarder s'il y a un x qui convient.

Voici une méthode qui ne passe pas en revue tous les cas (qui donc demande un peu moins de calculs) et qui est aussi la plus proche de ce qu'on a appris en cours.

Soit (x, y) couple d'entiers $\geqslant 0$ tels que $3x + 5y = 64$. Si y est pair, $5y$ est multiple de 10 donc l'écriture décimale de $64 - 5y$ se termine par un 4. (*Dit autrement,* $64 - 5y \equiv 4\ (10)$.) Si y est impair, l'écriture décimale de $64 - 5y$ se termine par un 9. (*Dit autrement,* $64 - 5y \equiv 9\ (10)$.) On n'a donc qu'à chercher les nombres x tels que $3x$ se termine par un 4 ou un 9. (*C'est-à-dire* $3x \equiv 4\ (10)$ *ou* $3x \equiv 9\ (10)$.) Les seules possibilités sont $x \equiv 3\ (10)$ et $x \equiv 8\ (10)$.

(*Pour le voir on peut faire une table modulo* 10

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3x$	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

)

Les seuls cas possibles sont donc $x = 3$, $x = 8$, $x = 13$, $x = 18$ car pour $x = 23$ on a $3x > 64$. On trouve les 4 couples $(3, 11)$, $(8, 8)$, $(13, 5)$ et $(18, 2)$.

3. Pour déduire le nombre de façons de verser le volume V dans la carafe à l'aide des deux récipients, on doit résoudre l'équation $69x+115y = 1472$. Comme $69 = 3\times 23$ et $115 = 5\times 23$ on en déduit $3x + 5y = 64$. Il s'agit de l'équation de la question précédente, on a vu qu'il y a 4 possibilités.

Exercice 2 Dans cet exercice, l'utilisation d'angles non orientés suffit.

Comme les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes, M est aussi sur la bissectrice intérieure en A : c'est le centre du cercle inscrit. Donc on peut écrire $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$. De plus $MH = MK$ car M est le centre du cercle inscrit donc équidistant des côtés. Enfin, $\widehat{AHM}$ et $\widehat{AKM}$ sont des angles droits par définition, donc $\widehat{AMH} = \widehat{AMK}$ (en utilisant la somme des angles dans les triangles AMH et AMK). En utilisant le cas d'égalité des triangles « CAC » on en déduit que les triangles AMH et AMK sont isométriques, ou dit autrement, que la réflexion d'axe (AM) envoie H sur K. Il s'ensuit que la droite (HK) est perpendiculaire à la droite (AM).

L'angle des droites (AM) et (HK) est égal à $\pi/2$, c'est un angle de droites, donc défini modulo π.

Exercice 3 La table modulo 14

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$2x$	0	2	4	6	8	10	12	0	2	4	6	8	10	12

donne les solutions : les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv 5\,(14)$ ou $x \equiv 12\,(14)$. Il y en a une infinité.

On pouvait aussi appliquer une règle de calcul que l'on a utilisée notamment en géométrie avec les « modulo 2π » : si on divise par 2, on doit diviser par 2 aussi le modulo. Ainsi, si $2x \equiv 10(14)$, en divisant par 2 on trouve $x \equiv 5(7)$. C'est le même résultat que précédemment.

Exercice 4 1. C'est un résultat vu en TD que si α est distinct de 0 et π modulo 2π, alors l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ [2\pi]$ est l'un des deux arcs (délimités par A et B et ne contenant pas les extrémités) d'un cercle passant par A et B. Si $\alpha = 0\ [2\pi]$ cet ensemble est égal à la droite (AB) privée du segment $[AB]$, c'est une réunion de deux demi-droites ouvertes. Enfin si $\alpha = \pi\ [2\pi]$ cet ensemble est le segment ouvert $]AB[$.

2. On a vu en TD comment faire. On construit la demi-droite δ partant de A et telle que $(\overrightarrow{AB}, \delta) = \pi/2 - \alpha\ [2\pi]$. Dans notre cas, c'est $\pi/4$ puisque $\alpha = \pi/4$. On appelle O le point d'intersection de δ et de la médiatrice de $[AB]$. C'est le centre du cercle recherché. L'ensemble des M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi/4\ [2\pi]$ est le plus long des deux arcs délimités par A et B.

Exercice 5 1. Je vous laisse le soin de (re)faire la figure. Certains se sont trompés !!

2. On utilise le procédé de construction décrit dans l'exercice précédent pour tracer d'abord : l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}) = 30°$ puis : l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MR}) = 90°$. Le point B est l'intersection des deux.