**Université Pierre et Marie Curie,** **janvier 2007**
**Licence LSFNE – U.E. LG 308**

# Corrigé examen de Mathématiques

**Exercice 1**

On a : a= $40q+3q^2$ avec $3q^2<40$ soit $q^2<14$ donc $q$ vaut 0 ;1 ;2 ou 3 et a vaut 0 ;43 ;92 ou 147.

**Exercice 2**

Notons $x$, $y$, $z$ et $t$ le nombre de déplacements dans chacune des 4 directions. Le joueur se trouve après tous ces déplacements sur la case (68x-170y ;223z-128t).

1) Pour atteindre la case (2 ;1°) il faut résoudre les 2 équations
$68x-170y = 2$ ; $223z-128t=1$. Or dans la première équation 68 et 170 sont tous deux multiples de 17 tandis que 2 ne l'est pas. L'équation n'a donc pas de solution et il est donc impossible de se rendre sur la case (2.1)

2) Pour atteindre la case (0 ;10°) en un minimum de coups il faut simplement se déplacer sur l'axe nord sud et résoudre l'équation
$223z-128t=10$.
Cherchons une relation de Bezout entre 223 et 128
223= 128+95 128=95+33 ….95=33x2+29……33=29+4……29=4x7+1.
Donc les nombres 223 et 128 sont premiers entre-eux et l'équation proposée admet des solutions.
1= 29-4x7=29-(33-29)7=29x8-33x7=(95-33x2)8-33x7=95x8-33x23=95x8-(128-95)23
=95x31—128x23=(223-128)31-128x23=223x31-128x54.
Une solution de l'équation est donc (310, 540).
Toutes les solutions sont ($310-128k$, $540+223k$).Or il faut une nombre positif et minimal de déplacements soit : $310-128k\geq 0$ $540+223k\geq 0$ et $850+95k$ minimal donc $k=-2$.
En conclusion la façon la plus rapide est d'effectuer 566 mouvements vers le nord puis 94 vers le sud (dans l'ordre qu'on veut).

3) Ca s'appelle le jeu des marcheurs parce qu'on marche beaucoup !

**Exercice 3**

**Première partie**

1) Théorème de Pythagore : Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$, alors $BC^2= AB^2+AC^2$.
2) Enoncé rectifié (Cette question n'a pas été notée).

Soit $ABC$ un triangle tel que $BC^2=AB^2+AC^2$. Soit le point $D$ tel que ($AD$) est perpendiculaire à ($AC$), $D$ est dans le demi-plan délimité par (AC) et ne contenant pas le point B et AD=AB.

Le triangle $ADC$ est rectangle en $A$ par construction donc d'après le théorème de Pythagore $CD^2= AC^2+AD^2 = AB^2+AC^2 = BC^2$. Donc le point $C$ est à égale distance de $D$ et de $B$. De plus le point A est aussi à égale distance de $D$ et de $B$ et ($AC$) est bien la médiatrice de [$BD$], le triangle $ABC$ est donc rectangle en $A$.

**Seconde partie**

2. Le triangle $PP'A$ est rectangle en $A$ et isocèle car les rotations conservent les distances donc $PP'^2= 2\ PA^2= 32$.

3. Utilisons la réciproque du théorème de Pythagore $PD^2+PP'^2= 4+32=36$.
Or, la rotation conserve les distances et $B$ est l'antécédent de $D$ par la rotation de centre $A$ et d'angle 90°donc $P'D^2=PB^2=36$.
Ainsi, le triangle $DPP'$ est rectangle en $P$.

4. D’après la relation de Chasles : $(PD, PA) = (PD, PP') + (PP', PA) = 90° + 45° = 135°$.
5. On sait que (*PP’*) est perpendiculaire à (*PD*) car le triangle *PP’D* est rectangle en *P*. Par ailleurs (*P’D’*) est l’image de (*PD*) par la rotation de centre *A* et d’angle 90°donc les droite (*P’D’*) et (*PD*) sont perpendiculaires. Ainsi *D* et *D’* sont sur la perpendiculaire à (*PD*) passant par *P*’, les points *D*, *P*’ et *D*’ sont donc alignés.
6. Le triangle *DPD’* est rectangle en P, le côté *PD*’ mesure *PP*’+*P’D’* soit $4\sqrt{2}+2$ (car P’D’=PD=2). D’après le théorème de Pythagore, on a donc
   $DD'^2 = 4+(2+4\sqrt{2})^2 = 40+16\sqrt{2}$. Cette valeur représente le carré de la diagonale du carré donc le côté du carré vaut $AD = \frac{DD'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}DD'}{2} = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.