Bases de numération (e)

Exercice e.1 *Cet exercice est un petit peu tordu. N'y prêtez pas trop attention.*
Pour écrire en base 423 il faut choisir 423 symboles. Pour éviter de le faire on prend les symboles $0, 1, 2, \ldots, 422$ et on écrit les nombres en base 423 en mettant des points entre les symboles : par exemple 946 s'écrit $\overline{2.100}_{(423)}$ car c'est $2 \times 423 + 100$. Pour le cas de 4498 on écrit les DE habituelles : $4498 = 10 \times 423 + 268$ avec $0 \leq 268 < 423$ (ici il n'y a qu'une DE à faire). Donc 4498 s'écrit $\overline{10.268}_{(423)}$.

Pour écrire 423 en base 4498 on prend la même convention d'écriture qu'au-dessus, avec les 4498 symboles $0, 1, 2, \ldots, 4497$. Comme $423 < 4498$ il n'y a aucune DE à écrire et on obtient directement l'écriture de 423 : c'est $\overline{423}_{(4498)}$.

Exercice e.2 *Exercice de l'écrit du concours Prof des Écoles !*
Un nombre qui s'écrit abc en base 10 vaut $n = 10^2 a + 10b + c$. Donc si $b = a + c$ on a :
$n = 100a + 10(a + c) + c = 110a + 11c = 11(10a + c)$, qui est divisible par 11. Donc Olivier a raison.

Réciproquement, si le nombre abc est divisible par 11, on n'a pas forcément $b = a + c$ car la somme $a + c$ peut être supérieure ou égale à 10; or le nombre b est compris entre 0 et 9 car c'est un chiffre de l'écriture en base 10 de n. Voici un contre-exemple : le nombre $n = 616 = 11 \times 56$ est divisible par 11 mais $a + c = 12$.

Remarque: ce qui est toujours vrai c'est que $b \equiv a + c$ (11), voir exercice c.8(3) !

Exercice e.3 Les semaines, jours, heures, minutes sont des durées qui, exprimées en secondes, sont multiples de 60. Faisons la DE de 1494312 par 60 : $1494312 = 24905 \times 60 + 12$ et $0 \leq 12 < 60$. Donc 1494312 secondes vallent 24905 minutes + 12 secondes.

Les semaines, jours, heures, exprimés en minutes sont des multiples de 60. La DE de 24905 par 60 est $24905 = 415 \times 60 + 5$ avec $0 \leq 5 < 60$. Donc 24905 minutes vallent 415 heures + 5 minutes.

Les semaines et jours, exprimés en heures, sont des multiples de 24. La DE de 415 par 24 est $415 = 17 \times 24 + 7$ avec $0 \leq 7 < 24$. Donc 415 heures vallent 17 jours et 7 heures.

Les semaines sont des multiples de 7 jours. On a $17 = 2 \times 7 + 3$ avec $0 \leq 3 < 7$.

Le résultat est que 1494312 secondes égalent 2 semaines, 3 jours, 7 heures, 5 minutes et 12 secondes. On a vu en faisant le calcul qu'on adapte la démonstration du cours en faisant des DE par des diviseurs qui varient **au lieu du même nombre de base** b : 60, 60, 24, 7. Le résultat s'exprime par l'égalité $1494312 = \mathbf{2} \times (7 \times 24 \times 60 \times) + \mathbf{3} \times (24 \times 60 \times) + \mathbf{7} \times (60 \times 60) + \mathbf{5} \times 60 + \mathbf{12}$. En d'autres termes 1494312 s'écrit $\overline{2.3.7.5.12}_{(\text{basevariable})}$. En référence au paragraphe 2.4 du cours on peut dire que le système utilisé pour les durées est un système de numération positionnel à base variable (positionnel car la place des chiffres est importante : 1 heure 10 minutes n'est pas la même chose que 10 heures 1 minute !).

Exercice e.4 126 s'écrit $\overline{1001}_{(\text{cinq})}$ et $\overline{7E}_{(\text{seize})}$, 221 s'écrit $\overline{1341}_{(\text{cinq})}$ et $\overline{DD}_{(\text{seize})}$, 1000 s'écrit $\overline{13000}_{(\text{cinq})}$ et $\overline{3E8}_{(\text{seize})}$.

Exercice e.5 En base 2 on a $S := \overline{1101} + \overline{1011} = \overline{11000}$ et $D := \overline{1101} - \overline{1011} = \overline{10}$.

Pour les produits : $\overline{110} \times \overline{11} = \overline{10010}$ et $(\overline{101})^2 = \overline{11001}$. Dans le dernier il y a une coquille : c'est $\overline{1001} \times \overline{101}$ qu'il fallait calculer et ça fait $\overline{101101}$.

Exercice e.6 Un nombre à 5 chiffres en binaire s'écrit $\overline{r_4 r_3 r_2 r_1 r_0}$ avec $r_4 = 1$ (sinon il aurait 4 chiffres !). Pour les chiffres de r_0 à r_3 on peut mettre des 0 ou des 1 au hasard, donc il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilités. Il y a donc 16 nombres à 5 chiffres en numération binaire.

En numération à base b, un nombre à n chiffres s'écrit $\overline{r_{n-1} \dots r_3 r_2 r_1 r_0}_{(\mathrm{b})}$ avec $r_{n-1} \neq 0$. Donc il y a $b-1$ choix possibles pour r_{n-1}, et b choix possibles pour chacun des autres chiffres. Au total il y a donc $(b-1)b^{n-1}$ nombres à n chiffres en base b.

Le plus petit de ces nombres correspond à $r_{n-1} = 1$ et les autres chiffres nuls, c'est donc $\overline{100 \dots 0}_{(\mathrm{b})}$ avec $n-1$ zéros. Il vaut b^{n-1}.

Le plus grand correspond à tous les chiffres égaux à $b-1$ (le plus grand parmi les chiffres en base b, qui sont $0, 1, \dots, b-1$). Il s'écrit $\overline{(b-1).(b-1). \dots (b-1)}_{(\mathrm{b})}$ et est égal à $(b-1)b^{n-1} + (b-1)b^{n-2} + \dots + (b-1)b + (b-1) = (b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b + 1) = b^n - 1$. Remarquons que le nombre suivant, qui est b^n, s'écrit en effet avec $n+1$ chiffres : $\overline{100 \dots 0}_{(\mathrm{b})}$ avec n zéros.

Exemples : en base 2, il y a $(b-1)b^{n-1} = 1 \times 2^4 = 16$ nombres à 5 chiffres, comme on l'a calculé. En base 10, il y a $(b-1)b^{n-1} = 9 \times 10^3 = 9000$ nombres à 4 chiffres, ce sont les nombres de 1000 à 9999.

Exercice e.7 On écrit que $A = 2n^2 + n + 1$, $B = 3n^2 + n + 2$ et $C = n^5 + 3n^4 + 3n^3 + 3n + 2$.

(1) L'égalité $C = AB$ s'écrit $n^5 + 3n^4 + 3n^3 + 3n + 2 = (2n^2 + n + 1)(3n^2 + n + 2)$. Or

$$(2n^2 + n + 1)(3n^2 + n + 2) = 6n^4 + 5n^3 + 8n^2 + 3n + 2$$

donc $C = AB$ ssi $n^5 + 3n^4 + 3n^3 + 3n + 2 = 6n^4 + 5n^3 + 8n^2 + 3n + 2$ i.e. $n^5 - 3n^4 - 2n^3 - 8n^2 = 0$. Divisons par n^2 (qui est non nul) et on a : $n^3 - 3n^2 - 2n - 8 = 0$.

Ainsi $n(n^2 - 3n - 2) = 8$ donc n divise 8. En conséquence n vaut 2, 4 ou 8 (le nombre 1 est exclu car une base doit être ≥ 2). Il est clair que c'est $n = 4$ la seule solution de $n(n^2 - 3n - 2) = 8$.

(1) En base 10, on a $A = 2 \times 4^2 + 4 + 1 = 37$ et $B = 3 \times 4^2 + 4 + 2 = 54$ et $C = ... = 1998$.

Exercice e.8 *Je ne démontre que le critère de divisibilité par 11. Comme vous l'avez sans doute compris, le plus efficace est d'utiliser les congruences.*

Raisonnons modulo 11 ; on note $a \equiv b$ au lieu de $a \equiv b$ (11). Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $10^n \equiv (-1)^n$. Donc si on écrit a sous la forme $r_n r_{n-1} \dots r_0$ en base 10, on a $a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + 10 r_1 + r_0$. Alors, $a \equiv r_n (-1)^n + r_{n-1}(-1)^{n-1} + \dots - r_1 + r_0$. Multiplions par $(-1)^n$ (ce qui ne change pas le fait d'être divisible par 11), on voit que a est divisible par 11 ssi $r_n - r_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} r_1 + (-1)^n r_0$ est divisible par 11.

Exercice e.9 La première chose à écrire (là encore) est $n = 100x + 10y + z$. Il n'y a pas de critère de divisibilité par 7 (pour les nombres écrits en base 10), mais on sait que $10 \equiv 3$ (7) et $100 \equiv 2$ (7) (puisque $100 = 14 \times 7 + 2$). Donc on a $n \equiv 100x + 10y + z \equiv 2x + 3y + z$ (7). On reconnaît le nombre $2x + 3y + z$ parmi la liste proposée : si n est divisible par 7 alors $2x + 3y + z$ l'est aussi.

Aucun des autres nombres proposés n'est divisible par 7 à coup sûr : le nombre $n = 112$ est un contre-exemple pour tous les cas.