Division euclidienne (d)

→ *Les commentaires en italique ne font pas partie de la rédaction des solutions !*

Exercice d.1 *L'exercice peut se résoudre uniquement avec la DE, comme dans la première solution ci-dessous. Si on dispose en plus de l'outil des congruences (qu'on a maintenant fait en cours) on peut aussi rédiger comme dans la deuxième solution.*

1ère solution. Les DE de m et n par 17 sont $\begin{pmatrix} m = 17q + 8 \text{ avec } 0 \leq 8 < 17 \\ n = 17q' + 12 \text{ avec } 0 \leq 12 < 17 \end{pmatrix}$ donc :

$$m + n = 17(q + q') + 20 = 17(q + q') + 17 + 3 = 17(q + q' + 1) + 3$$

(on utilise la DE : $20 = 17 + 3$). On reconnaît la DE de $m + n$ par 17 avec un reste égal à 3.

$$mn = (17q + 8)(17q' + 12) = 17(17qq' + 12q + 8q') + 8 \times 12 = 17(17qq' + 12q + 8q' + 5) + 11$$

(on utilise la DE : $96 = 5 \times 17 + 11$). On reconnaît la DE de mn par 17 avec un reste égal à 11.

$$m^2 = (17q + 8)^2 = 17^2q^2 + 2 \times 8 \times 17q + 64 = 17(17q^2 + 16q + 3) + 13$$

(on utilise la DE : $64 = 3 \times 17 + 13$). On reconnaît la DE de m^2 par 17 avec un reste égal à 13.

2ème solution. Raisonnons modulo 17 ; pour simplifier on note $a \equiv b$ au lieu de $a \equiv b$ (17). Alors,

(1) $m \equiv 8$ et $n \equiv 12 \Rightarrow m + n \equiv 8 + 12 \equiv 3$. Le reste de la DE de $m + n$ par 17 est donc 3.

(2) $m \equiv 8$ et $n \equiv 12 \Rightarrow mn \equiv 8 \times 12 \equiv 11$. Le reste de la DE de mn par 17 est donc 11.

(3) $m \equiv 8 \Rightarrow m^2 \equiv 8^2 \equiv 13$. Le reste de la DE de m^2 par 17 est donc 13.

Exercice d.2 *Proposons deux solutions comme à l'exercice précédent.*

1ère solution. Avec les premiers entiers n on a les DE : $10 = 6 + 4$, $100 = 6 \times 16 + 4$, $1000 = 6 \times 166 + 4$... On voit que le reste est 4. On le prouve par récurrence, en montrant que pour tout $n \geq 1$, $P(n)$: le reste de la DE de 10^n par 6 est 4. On a déjà montré que $P(1)$ est vraie. Supposant que $P(n)$ est vraie on a $10^n = 6q_n + 4$ et donc $10^{n+1} = 10 \times 10^n = 10(6q_n + 4) = 60q_n + 40 = 60q_n + 36 + 4 = 6(10q_n + 6) + 4$. On reconnaît la DE de 10^{n+1} par 6 avec un reste égal à 4. Donc $P(n)$ est vraie pour tout n.

2ème solution. Raisonnons modulo 6 ; pour simplifier on note $a \equiv b$ au lieu de $a \equiv b$ (6). On montre par récurrence que $P(n)$: $10^n \equiv 4$. Comme $10 = 6 + 4$ la propriété $P(1)$ est vraie. Supposant $P(n)$ vraie on a $10^{n+1} \equiv 10 \times 10^n \equiv 10 \times 4 \equiv 40 \equiv 4$. Donc $P(n)$ est vraie pour tout n.

Exercice d.3 *Comme on l'avait dit en TD, on pourrait interpréter les questions 1 à 5 comme demandant de déterminer* tous les cas *pour lesquels les propriétés demandées sur les quotients sont vraies. En fait, dans le langage des mathématiciens, les questions posées reviennent à demander si on a «...» pour tous entiers a, b, h, et si non il faut simplement donner un contre-exemple.*

(1) Cela n'est pas vrai pour tous a, b, h car si h augmente, le quotient va augmenter. (En termes d'intervalles de longueur b, si on ajoute h au nombre a il peut sortir de son intervalle numéro q.) Un contre-exemple est le quotient de la DE de $a = 20$ par $b = 7$, qui vaut 2. En choisissant $h = 1$ le quotient de la DE de $a + h = 21$ par $b = 7$ est 3.

(2) Cela n'est pas vrai (pour tous a, b, h...) car si h augmente, ici le quotient va diminuer. (En termes d'intervalles comme la longueur des intervalles augmente, le numéro de l'intervalle dans lequel se trouve a diminue.) Un contre-exemple est le quotient de la DE de $a = 20$ par $b = 7$, qui vaut 2. En choisissant $h = 5$ le quotient de la DE de $a = 20$ par $b + h = 12$ est 1.

(3) Cela n'est pas vrai car lorsque h devient très grand (si $h \to \infty$) alors le quotient s'approche de 1 (car la limite de $(a + h)/(b + h)$ est 1). Un contre-exemple est le quotient de la DE de $a = 20$ par $b = 7$, qui vaut 2. En choisissant $h = 100$ le quotient de la DE de $a + h = 120$ par $b + h = 107$ est 1.

(4) Cela n'est pas vrai car si on divise les intervalles de longueur b en sous-intervalles de longueur c, avec $b = nc$, alors on multiplie le nombre d'intervalles par n et donc le quotient sera multiplié à peu près par n. Un contre-exemple est le quotient de la DE de $a = 20$ par $b = 10$, qui vaut 2. En choisissant $c = 2$ le quotient de la DE de $a = 20$ par $c = 2$ est 10.

(5) Cela n'est pas vrai car le reste de la DE de a par b vérifie $0 \leq r < b$ mais il peut être plus grand que q (et donc il ne vérifiera pas $0 \leq r < q$). Un contre-exemple est le quotient de la DE de $a = 20$ par $b = 7$, qui vaut 2. Le quotient est $q = 2$ et le reste est 6. Le quotient de la DE de a par $q = 2$ est $10 \neq b$.

Exercice d.4 *C'est du calcul direct.*

(1) $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ avec $0 \leq 1 < n + 1$. C'est donc la DE de $n^2 + n + 1$ par $n + 1$. Donc le quotient est $q = n$ et le reste est $r = 1$.

(2) *Comme le diviseur augmente, le quotient va diminuer un peu. En essayant un quotient égal à* $n - 1$ *on a* $n^2 + n + 1 = (n - 1)(n + 2) + 3$. *On doit vérifier que le reste vérifie l'inégalité fondamentale i.e.* $0 \leq 3 < n + 2$. *Ceci n'est vrai que pour* $n \geq 2$. *On répond ainsi :*

Si $n = 1$, il s'agit de la DE de 3 par 3, on a donc $q = 1$ et $r = 0$. Si $n \geq 2$ on a $n^2 + n + 1 = (n - 1)(n + 2) + 3$ avec $0 \leq 3 < n + 2$; donc, $q = n - 1$ et $r = 3$.

Exercice d.5 Si la DE de a par 125 est $a = 125q + 3$ avec $0 \leq 3 < 125$, alors on peut aussi écrire $a = 5 \times (25q) + 3$ avec $0 \leq 3 < 5$. Donc le reste de la DE de a par 5 est encore 3.

Si le reste de la DE de a par 5 est 13, i.e. $a = 125q + 13$ avec $0 \leq 13 < 125$, alors on a $a = 125q + 10 + 3 = 5 \times (25q + 2) + 3$ et $0 \leq 3 < 5$. Donc le reste est là aussi 3.

Enfin, supposons que la DE de b par 5 est $b = 5q + 3$. Écrivons la DE de b par 15 : $b = 15q' + r$ avec $0 \leq r < 15$. Écrivons ensuite la DE de r par 5 : $r = 5q" + s$ avec $0 \leq s < 5$. On a donc $b = 15q' + 5q" + s$ ce qui montre que s est le reste de la DE de b par 5, i.e. $s = 3$. Donc r est < 15 et congu à 3 modulo 5, les seules possibilités sont $r = 3$, $r = 8$ et $r = 13$.