Les entiers naturels (c)

Exercice c.1 Si n est pair (c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k$) alors n^2 est pair donc $n^2 + n$ est pair.

Si n est impair (c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$) alors n^2 est impair (car $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$) donc $n^2 + n$ est pair.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est pair.

On peut aussi facilement démontrer le résultat par récurrence.

Exercice c.3 On calcule les premières valeurs de $n!$ et 3^n jusqu'à se faire une idée de leur comportement :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	1	3	9	27	81	243	729	2187

- On voit que pour $0 \leq n \leq 6$, on a $n! \leq 3^n$ (il n'y a égalité que pour $n = 0$).
- On montre par récurrence que pour tout $n \geq 7$, on a $3^n \leq n!$.

(1) Pour $n = 7$ c'est vrai comme on l'a vu dans le tableau.

(2) Supposons que, pour un entier $n \geq 7$, on ait $3^n \leq n!$. Alors, en multipliant terme à terme cette inégalité avec l'inégalité $3 \leq n + 1$ (vraie puisque $7 \leq n$), on a

$$3^{n+1} \leq n! \times (n + 1) = (n + 1)!$$

Donc la propriété est vraie au cran $n + 1$.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 7$.

Exercice c.4 On a : 2 heures 47 = 167 minutes. Or, $167 = 5 \times 29 + 22$ donc je peux téléphoner 5 fois à Lucie et il me restera 22 minutes.

Si j'appelle a fois Lucie et b fois Hugo, je dépense $7a + 29b$ minutes. De $29a + 7b \leq 167$ on déduit que $0 \leq a \leq 5$. Le maximum de minutes est dépensé lorsque

(1) $a = 0$ et $b = 23$, soit $7 \times 23 = 161$ minutes.
(2) $a = 1$ et $b = 19$, soit 162 minutes.
(3) $a = 2$ et $b = 15$, soit 163 minutes.
(4) $a = 3$ et $b = 11$, soit 164 minutes.
(5) $a = 4$ et $b = 7$, soit 165 minutes.
(6) $a = 5$ et $b = 3$, soit 166 minutes.

Donc en combinant des coups de fil à Lucie et Hugo, je peux téléphoner au maximum 166 minutes.

Exercice c.5 Soit k le plus grand entier tel que $3k \leq n$. (C'est le quotient de la division euclidienne de n par 3). On a donc trois possibilités : $n = 3k$, $n = 3k + 1$, ou $n = 3k + 2$. Selon le cas, on a

(1) $n^3 - n = 9k^2 - 3k = 3(3k^2 - k)$,

(2) $n^3 - n = (3k + 1)^3 - (3k + 1) = (27k^3 + 27k^2 + 9k + 1) - (3k + 1) = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k)$,

(3) $n^3 - n = (3k + 2)^3 - (3k + 2) = (27k^3 + 54k^2 + 36k + 8) - (3k + 2) = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est multiple de 3.

On peut aussi démontrer la propriété par récurrence :

(1) pour $n = 0$ c'est clair.

(2) Supposons que, pour un entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ soit multiple de 3. Alors,

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, on ajoute $3(n^2+n)$ à $n^3 - n$ qui est multiple de 3, donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est multiple de 3.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est multiple de 3.

Exercice c.6 (a) Il semble sur ces trois exemples que pour tout $n \geq 0$, on a : $100n(n+1)+25 = (10n+5)^2$.

(b) Pour $n = 9$ cela donne : $9025 = 95^2$ et pour $n = 10$ cela donne : $11000 + 25 = 105^2$. C'est correct dans les deux cas.

(c) En utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ on obtient $(10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25$.

Exercice c.7 L'énoncé est faux, en effet pour $m = n = p = 0$ et $q = 1$ il donne : $0 \leq -1$.

Exercice c.8 Pour calculer $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ on peut remarquer que $S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$ et donc $S + S$ égale

$$\begin{array}{ccccc} 1 & +2 & +\ldots & +(n-1) & +n \\ +n & +(n-1) & +\ldots & +2 & +1 \\ \hline (n+1) & +(n+1) & +\ldots & +(n+1) & +(n+1) \end{array}$$

et on compte n termes égaux à $n+1$. Donc $2S = n(n+1)$ et $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passons à l'autre somme.
Si $a = 1$ on a $a^m + \cdots + a^n = n - m + 1$ c'est-à-dire le nombre de termes (égaux à 1).
Si $a \neq 1$, on a $a^m + \cdots + a^n = a^m(1 + \cdots + a^{n-m}) = a^m \frac{a^{n-m+1}-1}{a-1} = \frac{a^{n+1}-a^m}{a-1}$.

Exercice c.9 Pour les premiers entiers on trouve : si $n = 1$, 2 régions délimitées. Si $n = 2$, 4 régions. Si $n = 3$, 7 régions. Si $n = 4$, 11 régions.

En continuant à ajouter des droites pour couper le plan en régions, on voit qu'il se passe la chose suivante. Ayant coupé le plan par n droites, on a un certain nombre de régions, disons R_n. Lorsqu'on dessine une $n+1$-ème droite, pour que toutes soient « en position générale » il faut que la droite ne soit parallèle à aucune des précédentes, et ne passe par aucune intersection de 2 droites. En d'autres termes, la droite va couper (une seule fois !) chacune des n droites déjà tracées, et ce faisant elle quitte une région en la divisant en 2. À la dernière droite croisée, elle coupe encore une région en 2. Au total elle a coupé $n+1$ régions en 2, c'est-à-dire qu'elle en a créé $n+1$. Donc : $R_{n+1} = R_n + n + 1$. Donc,

$$R_n = R_{n-1} + n = R_{n-2} + n + (n-1) = \cdots = n + (n-1) + \cdots + 2 + R_1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Exercice c.10 Montrons que (i) implique (ii). Il suffit de montrer que si une partie $A \subset \mathbb{N}$ n'a pas de plus petit élément, alors elle est vide. Puisqu'on suppose (i) on peut démontrer cela par récurrence : on va montrer pour tout $n \geq 0$, la propriété $P(n)$: « pour tout $i \leq n$, $i \notin A$ ». Pour $n = 0$ c'est vrai, car si $0 \in A$ c'est son plus petit élément de toute évidence. Supposons $P(n)$ vraie, alors il suffit de montrer que $n+1 \notin A$ pour avoir $P(n+1)$. Or cela est clair, car sinon $n+1$ serait le plus petit élément de A.

Montrons maintenant que (ii) implique (i). On se donne une propriété $P(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire et il s'agit de montrer que P est vraie pour tous les entiers $n \geq 0$. On considère l'ensemble des entiers tels que P n'est pas vraie :

$$A := \{ \, n \in \mathbb{N} \, , \; P(n) \text{ n'est pas vraie } \}$$

Si A est non vide alors elle a un plus petit élément m d'après (ii). Cela veut dire que $P(m)$ n'est pas vraie (en particulier $m \geq 1$ puisque $P(0)$ est vraie) et $P(m-1)$ n'est pas vraie. Or, ceci contredit le fait que P est héréditaire. Donc A est vide, c'est-à-dire, P est vraie pour tous les entiers $n \geq 0$.