Corrigé

Exercice 1

Un nombre entier relatif pair est un nombre $n \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.

Exercice 2

1. La division euclidienne de a par b est $1\,111\,111\,111 = 123\,456\,789 \times 9 + 10$. Donc le quotient est 9 et le reste est 10.

2. Pour calculer le pgcd on applique l'algorithme d'Euclide. La première étape est la division euclidienne de la question 1. Les étapes suivantes sont :

$$\begin{aligned}&123\,456\,789 = 10 \times 12\,345\,678 + 9\\&10 = 9 \times 1 + 1\end{aligned}$$

donc le pgcd est 1.

3. On trouve u et v en écrivant l'algorithme à l'envers, c'est-à-dire en partant de la dernière division euclidienne et en remplaçant les restes successifs à l'aide des divisions précédentes :

$$\begin{aligned}1 = 10 - 9 \times 1 &= 10 - (b - 12\,345\,678 \times 10)\\&= 12\,345\,679 \times 10 - b = 12\,345\,679(a - 9b) - b\\&= 12\,345\,679a - 111\,111\,112b\end{aligned}$$

Ainsi on trouve le couple $(u, v) = (12\,345\,679, -111\,111\,112)$.

4. D'après la question 3. le montant « 1 euro » peut être payé en donnant $12\,345\,679$ pièces de a au commerçant, et celui-ci rend $111\,111\,112$ pièces de b. Donc pour payer un montant de n euros, il suffit de donner $12\,345\,679 \times n$ pièces de a au commerçant, et celui-ci rend $111\,111\,112 \times n$ pièces de b. Donc n'importe quel prix entier peut être payé.

Exercice 3

Le dernier chiffre de l'écriture décimale de 2007^{2006} est le reste dans la division euclidienne de ce nombre par 10, donc on peut utiliser les règles de calcul modulo 10. On observe tout d'abord que $2007 \equiv 7\,(10)$ donc $2007^{2006} \equiv 7^{2006}\,(10)$. Il reste donc à étudier les puissances de 7, pour comprendre ce qu'il se passe pour la 2006-ème. Pour trouver une puissance, on prend la précédente et on multiplie par 7. Pour les premières on trouve $7^2 = 49 \equiv 9\,(10)$, $7^3 = 7^2 \times 7 \equiv 9 \times 7 \equiv 3\,(10)$, $7^4 = 7^3 \times 7 \equiv 3 \times 7 \equiv 1\,(10)$. En élevant $7^4 \equiv 1\,(10)$ à la puissance k on trouve $7^{4k} \equiv 1^k \equiv 1\,(10)$. Or $2006 = 4k + 2$ avec $k = 501$, donc modulo 10 on a

$$7^{2006} = 7^{4k+2} = 7^{4k} \times 7^2 \equiv 1 \times 9 \equiv 9\,(10)$$

Le dernier chiffre de l'écriture décimale de 2007^{2006} est donc 9.

Exercice 4

1. Soient H et K les projetés orthogonaux de B et C sur la droite (AM). Pour calculer les aires de MAB et MAC on utilise leur base commune AM, et les longueurs des hauteurs correspondantes sont alors BH (pour le triangle MAB) et CK (pour MAC). On a donc

$$\frac{\mathcal{A}(MAB)}{\mathcal{A}(MAC)} = \frac{\frac{1}{2}AM.BH}{\frac{1}{2}AM.CK} = \frac{BH}{CK}$$

Par leur définition, les droites (BH) et (CK) sont perpendiculaires à (AM) et donc parallèles entre elles. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle BNH (le segment $[CK]$ est éventuellement hors du triangle), on obtient $\overline{BH}/\overline{CK} = \overline{NB}/\overline{NC}$. En ne regardant que la valeur absolue des mesures algébriques, on a donc $\mathcal{A}(MAB)/\mathcal{A}(MAC) = BH/CK = NB/NC$.

2. Dans la suite il sera commode de noter A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Soit M un point du plan. Si M n'appartient ni à (AC) ni à la parallèle à (BC) passant par A, d'après la question 1. on aura $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ exactement lorsque $NB = NC$. Cela veut dire que N est le milieu A' de $[BC]$. Donc en conclusion $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ ssi M appartient à la médiane (AA').

Si M appartient à (AC), alors $\mathcal{A}(MAC) = 0$. Donc on a $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ si et seulement si $\mathcal{A}(MAB) = 0$, c'est-à-dire $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = A$.

Si enfin M appartient à la parallèle à (BC) passant par A, les droites (AM) et (BC) sont parallèles. Dans ce cas (en gardant les notations introduites dans 1.) les hauteurs BH et CK sont égales, donc on a toujours $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$.

En conclusion l'ensemble des points M du plan tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ est la réunion de la médiane (AA'), et de la parallèle à (BC) passant par A.

En particulier l'ensemble des points M intérieurs au triangle et tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ est le segment $[AA']$.

3. Soit G le point d'intersection des médianes (AA') et (BB'). Il est à l'intérieur du triangle : $G \in [AA']$ et $G \in [BB']$. Pour montrer que les trois médianes sont concourantes il suffit de montrer que $G \in [CC']$. Or d'après la question 2. on a

- $\mathcal{A}(GAB) = \mathcal{A}(GAC)$ (car $G \in [AA']$)
- $\mathcal{A}(GAB) = \mathcal{A}(GBC)$ (car $G \in [BB']$)

donc $\mathcal{A}(GAC) = \mathcal{A}(GBC)$. Comme de plus G est intérieur au triangle, en utilisant encore la question 2. on a $G \in [CC']$. Donc les trois médianes sont concourantes au point G.

4. (DESSIN)