

Les entiers naturels (c)

Une * désigne un exercice un peu plus difficile.

Exercice c.1 Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n$ est pair.

Exercice c.2 Calculer, en posant les opérations :

$$423 \times 4498 \quad ; \quad 423 - 4498 \quad ; \quad 42,3 + 44,98 \quad ; \quad 4498 \div 423$$

Exercice c.3 Comparer les nombres $n!$ et 3^n .

Exercice c.4 Il reste 2 heures 47 sur mon forfait 3 heures. Lucie est très bavarde, et chaque coup de téléphone avec elle me coûte 29 minutes. Combien de fois est-ce que je peux encore l'appeler ? Hugo, lui, n'a jamais rien à dire au téléphone et ça dure 7 minutes. Combien de temps au maximum puis-je téléphoner en combinant des coups de fil à Lucie et Hugo ?

Exercice c.5 Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est multiple de 3.

Exercice c.6 On remarque que :

$$\begin{array}{ll} 65^2 = 4225 & \text{et que } 6 \times 7 \times 100 + 25 = 4225 \\ 145^2 = 21025 & \text{et que } 14 \times 15 \times 100 + 25 = 21025 \\ 1275^2 = 1625625 & \text{et que } 127 \times 128 \times 100 + 25 = 1625625 \end{array}$$

- (a) Généraliser cette remarque en proposant une relation mathématique.
- (b) Vérifier cette relation sur deux autres exemples.
- (c) Démontrer cette relation.

Exercice c.7 Est-il vrai que pour tout quadruplet d'entiers naturels m, n, p, q on a :

$$(m \leq n \quad \text{et} \quad p \leq q) \quad \Rightarrow \quad m - p \leq n - q \quad ?$$

Exercice c.8 Calculer $1 + 2 + \dots + n$, puis $a^m + \dots + a^n$ pour $m \leq n$.

Exercice c.9 * Déterminer le nombre de régions délimitées par n droites « en position générale » (ce qui signifie que deux quelconques des droites ne sont pas parallèles et que trois quelconques ne sont pas concourantes).

(Indication : essayez de deviner la réponse puis démontrez-la par récurrence)

Exercice c.10 * Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

- (i) Le principe de récurrence est vrai.
- (ii) Toute partie non vide de \mathbb{N} a un plus petit élément.