Université Pierre et Marie Curie, **8 janvier 2007**
Licence LSFNE – U.E. LG 308

Examen de Mathématiques

Durée : 2 heures

Exercice 1

1) On effectue les divisions
2) Soit x un nombre à 6 chiffres dont l'écriture en base décimale est $\overline{abcdef}$, alors .

$x= a10^5+b10^4+c10^3+d10^2+10e+f = 4a+3b+12c+9d+10e+f = 0[13]$; car
$100 \equiv 9[13]; 1000 \equiv 12[13]; 10000 \equiv 3[13]; 100000 \equiv 4[13]$.
Soit y le nombre obtenu en faisant passer le premier chiffre à la fin.
$y= 10^5 f +a10^4+b10^3+c10^2+d10+e = 3a+12b+9c+10d+e+4f$
$= 4(4a+3b+12c+9d+10e+f) = 0[13]$.

Exercice 2
Une isométrie affine du plan affine orienté est une transformation qui **conserve les longueurs.**
Il y a quatre types d'isométries :

- Deux déplacements qui conservent les angles orientés :
  - Les translations caractérisées par le vecteur $\vec{u}$ de translation
    $t_{\vec{u}}(M) = M'$ si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
  - Les rotations caractérisées par le centre A et l'angle de rotation α,
    $r_{A,\alpha}(M) = M'$ si $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha$ [2π].
- Deux antidéplacements qui changent les angles orientés en leur opposé :
  - Les réflexions caractérisées par l'axe D
    $s_D(M) = M'$ si D est la médiatrice de $[MM']$.
  - Les symétries glissées caractérisées par un axe D et un vecteur de translation $\vec{u}$ de même direction que D, $f_{D,\vec{u}}(M) = M'$ si $s_D \circ t_{\vec{u}}(M) = M'$.
    On remarque que $s_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_D$.

Exercice 3

1) Après 3 coups, le joueur aura avancé de 39 plots mais comme il y a 35 plots, il sera sur le plot 4 car 39=4[35]
2) S'il doit aller sur le plot 7, il lui faut avancer de x coups tels que $13x=7[35]$.

Il faut donc résoudre l'équation : $13x = 7+ 35y$, ou encore $13x-35y=7$.
Cette équation a des solutions car 13 et 35 sont premiers entre eux. Le joueur pourra donc se rendre sur le plot 7.
Résolvons l'équation.

(i) Recherche d'une relation de Bezout entre 13 et 35

35= 13x2+9 13=9x1+4 9=4x2+1	1= 9-4x2=9-(13-9)x2=9x3-13x2=(35-13x2)x3-13x2=35x3-13x8

(ii) Recherche d'une solution de l'équation

35x21-13x56=7. Une solution est (-56 ; 21)

(iii) Recherche de toutes les solutions

Les solutions (*x*, *y*) sont telles que : (*x*+56)13 = (*y*-21)35.

x+56=35*k* et *y*-21=13*k* . Toutes les solutions sont donc (-56+35*k ;* 21+13*k*).

(iv) Recherche d'une solution telle que *x* soit un nombre strictement positif le lus petit possible.

-56+35*k*>0 k>2

La solution cherchée est donc (14 ; 47). Le joueur arrivera au plot 7 en 14 coups minimum.

Rem Certains étudiants ont trouvé une solution plus simple : si le joueur arrive sur le plot 7 en k coups alors kx13=35q+7. Ils ont ensuite essayé les premières valeurs de q et regardé si 35q+7 est multiple de 13. La première valeur trouvée est q=5 ce qui correspond à k=14. D'où le résultat. Ici cette solution est plus rapide mais avec d'autres valeurs numériques elle peut s'avérer très longue.

Exercice 4

2) Un triangle inscrit dans un cercle dont un coté est un diamètre est un triangle rectangle. Les triangles *ABD* et *ACB* sont donc rectangles respectivement en *B* et *C*. Donc (*BD*) est perpendiculaire à (*AC*) et comme (*CH*) qui est la hauteur est aussi perpendiculaire à (*AB*) les droites (*CH*) et (*BD*) sont parallèles. De même les droites (*BD*) et (*CH*) sont parallèles. Donc le quadrilatère *BDCH* est un parallélogramme.

3) Dans le triangle *AHD*, (*OI*) qui est la médiatrice de [*BC*] est parallèle à *AH* qui est perpendiculaire à BC. Par ailleurs *O* est le milieu de *AD* donc d'après le théorème de Thalès, $\overline{AH} = 2\overline{OI}$ finalement, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

4) La composée $s \circ s'$ est une isométrie c'est une translation car c'est la composée de 2 réflexions d 'axe parallèle. C'est une translation de vecteur $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

5) L'image de *A* par *t* est donc *H* donc $s \circ s'(A)=H$ *;* soit en appliquant une seconde fois *s* s($s \circ s'$(*A*)) = s(*H)* donc *s'*(*A*)) = s(*H*). Or, l'axe de la réflexion de *s'* passe par *O* , le cercle est donc globalement invariant par cette réflexion et *s'*(*A*) = s(*H*) est donc sur le cercle d'où le résultat.