Licence SFNE, Module LG308 7 septembre 2006

Examen de Mathématiques

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Il est conseillé aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer.

Exercice 1 (1 point)

Donnez la définition des nombres entiers relatifs pairs et impairs.

Exercice 2 (6 points)

Sur la planète LG308, il n'y a que deux types de pièces de monnaie pour payer ses courses chez les commerçants : des pièces de $a = 1\,111\,111\,111$ et de $b = 123\,456\,789$ euros. Les habitants de LG308, immensément riches, possèdent une quantité illimitée de pièces de chaque sorte. On se pose la question de savoir si n'importe quel prix correspondant à un nombre entier peut être payé, sachant que les commerçants rendent la monnaie. (Ainsi par exemple, on peut payer $987\,654\,322$ euros : on donne une pièce de a et le commerçant rend une pièce de b.)

1. Calculez le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculez $d = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminez deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.
4. En expliquant votre réponse, dites si, sur la planète LG308, tout montant entier peut être payé.

Exercice 3 (3 points)

Calculez le dernier chiffre de l'écriture décimale de 2007^{2006}. (*Indication : raisonnez en congruences modulo* 10 *et calculez en particulier le reste dans la division euclidienne par* 10 *de* $7, 7^2, 7^3, 7^4$...)

Exercice 4 (10 points)

Étant donnés trois points R, S, T du plan, on note $\mathcal{A}(RST)$ l'aire du triangle qu'ils définissent. Si ces points sont alignés on considère que $\mathcal{A}(RST) = 0$.

Soit ABC un triangle.

1. *Dans cette question, et dans cette question seulement*, on considère un point M du plan n'appartenant ni à la droite (AC) ni à la parallèle à (BC) passant par A. On appelle N le point d'intersection de (AM) et de (BC). Montrez que, dans ce cas,

$$\frac{\mathcal{A}(MAB)}{\mathcal{A}(MAC)} = \frac{NB}{NC}$$

(observez que les triangles MAB et MAC ont une base commune).

2. Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$, en veillant à rédiger soigneusement. Donnez en particulier l'ensemble des points M intérieurs au triangle et tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$.

3. Déduisez de 2. que les trois médianes de ABC sont concourantes.

4. Sur un dessin, hachurez la partie des points M intérieurs au triangle tels que l'aire $\mathcal{A}(MAB)$ soit supérieure ou égale à la fois à $\mathcal{A}(MAC)$ et à $\mathcal{A}(MBC)$ (on ne demande pas de justification pour cette question).