

Examen de Mathématiques

— Durée : 2 heures —

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.

Il est conseillé aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer.

On pourra tracer les arcs de cercle au compas ou bien le plus proprement possible à la main.

Exercice 1

On souhaite remplir une carafe de 1475 ml avec deux plus petits récipients de 69 ml et 115 ml.

- Est-ce possible ? (Calculez le pgcd de 69 et 115.)
Quel est le volume maximal V de liquide qu'on pourra verser dans la carafe ?
- Trouvez toutes les couples (x, y) d'entiers positifs ou nuls tels que $3x + 5y = 64$.
- Déduisez-en le nombre de façons de verser le volume V dans la carafe à l'aide des deux récipients.

Exercice 2

Soit ABC un triangle et M l'intersection des bissectrices (intérieures au triangle) en les sommets B et C . On note H et K les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AC) , respectivement.

Faites une figure. Quel est l'angle entre les droites (AM) et (HK) ?

Exercice 3

Quelles sont les solutions dans \mathbb{Z} de l'équation $2x \equiv 10 \pmod{14}$?

Exercice 4

Soient A et B deux points du plan et α un réel donné.

- Quel est l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{2\pi}$? (On distinguera les cas $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$; $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$; et α distinct de 0 et π modulo 2π .)
- Construisez cet ensemble dans le cas $\alpha = \pi/4$ et expliquez la construction.

Exercice 5

Le capitaine d'un bateau de pêche navigue au voisinage de la côte et veut placer la position de son bateau B sur une carte marine. Pour cela, il mesure les angles entre trois points remarquables, visibles de loin : un phare P , un château d'eau C situé à terre, et un récif affleurant R .

Sur la carte, on choisit un repère orthonormé (O, x, y) orienté dans le sens trigonométrique. La terre est le domaine où $x \leq -1$ et la mer est le domaine où $x > -1$. Les points remarquables sont représentés par leurs coordonnées $P(2, 6)$, $C(-2, 2)$ et $R(1, -6)$.

- Faites une figure.
- Avec sa boussole ⁽¹⁾, le capitaine mesure en degrés les angles $\alpha = (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC}) = 30^\circ$ et $\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BR}) = 90^\circ$. Placez le point B sur la figure, en expliquant votre construction.

¹Dans le vocabulaire maritime, la boussole est dénommée *compas*, ce qui entraînerait ici des confusions !