Un autre point de vue sur changement de base et cohomologie

Marc Chardin
10/11/2011

$B = A[X_1, \dots, X_n]$ avec graduation naturelle

M un B-module gradué

__Déf__ $m \geq 0$. On dit que M est de m-présentation finie s'il existe une ~~(complexe)~~ suite exacte $L_m \to \dots \to L_1 \to L_0 \to M$ avec L_i libre de type fini.

__Prop.__ si R noeth. Alors un module de 0-PF ($=$ TF) est de ∞-PF

~~dém~~ : [noethérianité : tt ss-module d'un module TF est TF ■]

- si R est cohérent, tout module de 1-PF est de ∞-PF ■

  ($\overset{\text{cohérent}}{\|}$ déf : tout sous-module TF d'un module libre de TF est de PF)

preuve utilise

__Lm__ Soit R un anneau, $N \xrightarrow{\varphi} M$ surjectif, N de TF et M de PF, alors $\ker(\varphi)$ est de TF.

~~Cor si R cohérent R est~~ __dém__ : Bourbaki ou exercice ■

__Cor__ si R est cohérent et $L_\bullet$ complexe de R-modules libres TF. Alors l'homologie de $L_\bullet$ est de PF

__dém__ : on a $L_{i+1} \xrightarrow{\psi} L_i \xrightarrow{\varphi} L_{i-1}$

$\mathrm{Im}(L_i) \subset L_{i-1}$ ← PF car R cohérent

$$\ker(\varphi) \to L_i \to \mathrm{Im}(L_i) \to 0$$

$\ker(\varphi)$: TF par le lm puis PF car R cohérent

on a une prés. $G \to F \to \ker(\varphi)$, et $L_{i+1} \to \ker(\varphi)$ se relève en $L_{i+1} \to F$

d'où $G \oplus L_{i+1} \to F \to \ker(\varphi)/\mathrm{im}(\psi) \to 0$ cqfd.

Considérons maintenant le complexe de Čech :

$$\mathcal{C}^{\cdot}_{\underline{x}} M : \quad 0 \to M \to \bigoplus_i M_{x_i} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i<j} M_{x_i x_j} \to \cdots$$

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ le uplet de variables

Les applications sont au signe près les applic. triviales

On mq l'homologie de $\mathcal{C}^{\cdot}_{\underline{x}} M$ ne dépend que de l'idéal radical $(x_1, \dots, x_n)$.

Soit $\mathcal{F} = \tilde{M}$

On a $\ker \varphi = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^{n-1}_{\operatorname{Spec}(A)}, \mathcal{F}(\mu))$ (gradué de d°0)

J'ai oublié de dire qu'on note $H^i_{B_+}(M)$ et on appelle gpe de cohom de Čech le ième groupe d'homologie de $\mathcal{C}^{\cdot}_{\underline{x}}(M)$.

Notons $B_+ = (x_1, \dots, x_n) \subseteq B = A[x_1, \dots, x_n]$.

On a une SE :

$$0 \to H^0_{B_+}(M) \to M \to \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^{n-1}_{\operatorname{Spec}(A)}, \mathcal{F}(\mu)) \to H^1_{B_+}(M) \to 0$$

~~autrement dit~~ et des iso

$$H^{i+1}_{B_+}(M) \simeq \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}} H^i(\mathbb{P}^{n-1}_{\operatorname{Spec}(A)}, \mathcal{F}(\mu)), \ \forall i \geq 1$$

gradué de d°0.

<u>Th1</u> Soit M un B-module gradué PF avec B cohérent (ce qui implique A cohérent). Alors

(i) $H^i_{B_+}(M)_\mu$ est un A-module PF, $\forall \mu \in \mathbb{Z}$

(ii) $\exists \mu_0$ tq $\forall i, \forall \mu \geq \mu_0$, $H^i_{B_+}(M)_\mu = 0$.

<u>Preuve</u> On prend $L_\cdot \to M$ une rés. libre graduée avec L_i libre de type fini, $\forall i$.

On regarde le complexe double $\mathcal{C}^{\bullet}_{\underline{X}}(L_\bullet)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \to & L_3 & \to & L_2 & \to & L_1 & \to & L_0 & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \to & \oplus L_{3x_i} & \to & \oplus (L_2)_{x_i} & \to & \oplus (L_1)_{x_i} & \to & \oplus (L_0)_{x_i} & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \to & (L_3)_{x_1\cdots x_n} & \to & (L_2)_{x_1\cdots x_n} & \to & (L_1)_{x_1\cdots x_n} & \to & (L_0)_{x_1\cdots x_n} & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Prenons l'homologie en lignes : on obtient

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 0 & & 0 & \\
 & & & & \downarrow & \\
\cdots & 0 & 0 & \to & M & \to 0 \\
 & & & & \downarrow & \\
\cdots & 0 & 0 & \to & \oplus M_{x_i} & \to 0 \\
 & & & & \downarrow & \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & \downarrow & \\
\cdots & 0 & 0 & \to & \oplus M_{x_1\cdots x_n} & \to 0 \\
 & & & & \downarrow & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Prenons l'homologie en colonnes : on obtient

$$\begin{array}{ccc}
0 & 0 & H^0_{B_+}(M) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & H^n_{B_+}(M)
\end{array}$$

Ceci donne la suite spectrale ${}^{I}E_2^{p,q}$ du complexe double associé.

on regarde maintenant la s.s. ${}^{II}E_2^{pq}$: on va commencer par prendre l'homologie en colonnes. On utilise : le fait que L_i est libre : $L_i = \bigoplus_{j \in J_i} B(-a_{ij})$, et l'homologie de B :

$$H^j_{B_+}(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ \dfrac{1}{x_1 \cdots x_n} A[x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \end{cases}$$

(plus généralement, si M est un A-module :

$$H^i_{B_+}(M[x_1, \dots, x_n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \dfrac{1}{x_1 \cdots x_n} M[x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \end{cases}$$

on montre la partie "$= 0$ si $i \neq n$" en utilisant

$$\underbrace{\check{C}^\bullet_x(\cancel{A})}_{M[x_1 \cdots x_n]} = \varinjlim_t \underbrace{K^\bullet(x_1^t, \dots, x_n^t ; M[x_1 \cdots x_n])}_{\text{cplx de Koszul}}$$

et l'autre partie par un calcul explicite)

Résultat :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
0 & 0 \arrow[d] \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \arrow[d] \\
H^1_{B_+}(L_0)_\mu \arrow[r] & H^n_{B_+}(L_0)_\mu
\end{tikzcd}$$

A-modules libres TF
leur homologie est donc PF

En prenant $\mu > \max_{\substack{i \leq n \\ j \in J_i}} \{a_{ij}\} - n$, alors $H^n_{B_+}(L_i)_\mu = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ d'où le 2^e pt du th $\blacksquare$

Régularité de Castelnuovo-Mumford

Soit M un B-module gradué. On définit :

$$a_i(M) = \sup\{\mu \in \mathbb{Z},\ H^i_{B_+}(M)_\mu \neq 0\} \quad (\text{ou } -\infty)$$

$$b_i(M) = \sup\{\mu \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Tor}_i^B(M,A)_\mu \neq 0\} \quad (\text{ou } -\infty)$$

ici $A = B/B_+$.

$$\mathrm{reg}(M) = \max_i \{a_i(M) + i\} \overset{\text{Th}}{=} \max_i \{b_i(M) - i\}$$

Prop soit $M \neq 0$ de PF et B cohérent. Alors $\mathrm{reg}(M) \in \mathbb{Z}$ (ie $\neq \pm\infty$)

Th 2 Soit M un B-module de régularité finie. LCSSE :

(i) $\tilde{M}$ est plat sur A $\quad$ ($\mathcal{F} = \tilde{M}$ le fsc associé)

(ii) M_μ est plat sur A, $\forall \mu > \mathrm{reg}(M)$.

Lm soit M un B-module gradué.

(i) si $L_\bullet$ est une rés. libre de M et pour des μ, i donnés on a $\mathrm{Tor}_i^B(M,A)_\mu \neq 0$, alors $B(-\mu)$ est facteur direct de L_i

(ii) si $M_\mu = 0$ $\forall \mu \ll 0$, il existe une rés. libre $L_\bullet$ de M où L_i a pour seuls sommants des $B(-\mu)$ pour μ tq $\mathrm{Tor}_j^B(M,A)_\mu \neq 0$ pour un $j \leq i$.

Dém th ISM $i \Rightarrow ii$. Pour cela ISM $\forall N$ un A-module (TF si on veut)

$\mathrm{Tor}_1(M_\mu, N) = 0$.

Th 3 soit (A, m, k) local. noeth et M B-mod gradué de TF, $d = \dim M \otimes_A k$

(i) $H^i_{B_+}(M) = 0 \quad \forall i > d$.

(ii) $H^d_{B_+}(M) \otimes_A k \longrightarrow H^d_{B_+}(M \otimes_A k)$ est un iso.

<u>Th 4</u> $I \subset B$ idéal homogène. supp que $X = \mathrm{Proj}\, B \to \mathrm{spec}\, A$ a une fibre de dim d. Alors
$$H^d(X, \mathcal{O}_X(\mu)) \neq 0 \quad \forall \mu < -d.$$