Stratifications aplatissantes

Matthieu Romagny, 1er décembre 2011

1 Définition et motivation

1.1 Platificateurs

Soit $X \to S$ un morphisme de schémas et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Le *platificateur (universel) de $\mathscr{F}$ relativement à S* est le foncteur F sur les S-schémas défini par :

$$F(T) = \begin{cases} \{\varnothing\} & \text{si } \mathscr{F}_T \text{ est plat sur } T, \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est un sous-foncteur du foncteur des points de S ; s'il est représentable par un schéma S', le morphisme $S' \to S$ est un monomorphisme bijectif.

Exemples. Voici des exemples et contre-exemples de monomorphismes bijectifs :

(1) le morphisme $S' = \amalg S_\alpha \to S$ défini par une stratification de S. Une *stratification* est une collection finie de sous-schémas $S_\alpha \hookrightarrow S$ dont les ensembles sous-jacents partitionnent S ; on demande souvent (mais ce n'est pas le cas dans Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*) que la frontière $\partial S_\alpha = \overline{S}_\alpha \smallsetminus S_\alpha$ d'une strate est une union de strates S_β.

(2) le morphisme $S' \to S$ où S est la courbe nodale d'équation $y^2 = x^2(x+1)$ et S' est l'ouvert de la normalisée obtenu en enlevant l'un des deux points au-dessus du point singulier.

(3) la normalisation $S' \to S$ de la courbe cuspidale $y^2 = x^3$ n'est pas un monomorphisme : si on note $s \in S$ le point singulier et s' sa préimage, on voit que n'importe quel vecteur tangent $u : \mathrm{Spec}(k[\epsilon]/\epsilon^2) \to S'$ centré en s' s'envoie par f sur le vecteur tangent nul centré en s.

Il existe des résultats de représentabilité du platificateur sous des hypothèses assez générales ; on en a un exemple en lisant le chapitre *More on flatness* du Stacks Project, et notamment le lemme de tag 05UH. Dans les cas les plus généraux, on ne peut pas bien décrire S'.

Un cas sympathique est celui où le platificateur F est représentable par une stratification comme dans l'exemple (1). On dit alors que $\{S_\alpha\}$ est une *stratification aplatissante*. Le sujet principal de l'exposé est de voir que c'est le cas lorsque $X \to S$ est projectif et $\mathscr{F}$ est cohérent. Mieux, le polynôme de Hilbert de $\mathscr{F}_s$ relatif au choix d'un faisceau très ample $\mathscr{O}_X(1)$ est fonction localement constante de $s \in S$, et nous verrons que le platificateur est somme disjointe de platificateurs F_P indicés par les polynômes, chacun représentable par une strate S_P.

1.2 Motivation

Indiquons très brièvement comment apparaît un platificateur pour la construction du schéma de Hilbert. On notera qu'on a besoin de la représentabilité du platificateur, mais pas du fait qu'il est donné par une stratification.

Soient S un schéma noethérien, X un S-schéma projectif, $\mathscr{E}$ un faisceau cohérent sur X, plat sur S, et P un polynôme numérique (i.e. à coefficients rationnels, à valeurs entières). On note $\pi : X \to S$ le morphisme de structure et $\pi_T : X_T \to T$ l'image inverse par un changement de base $T \to S$. D'après le théorème sur la régularité de Castelnuovo-Mumford (exposé de C. Demarche) et le théorème de changement de base dans la cohomologie (exposés de F. Martin et A. Rodriguez), il existe un entier m tel que pour tout $r \geqslant m$, tous les sous-faisceaux et quotients de $\mathscr{E}$ qui vont intervenir ci-dessous ont leur m-twist engendré par ses sections globales, à images directes supérieures nulles, et à image directe localement libre de formation compatible au changement de base. On montre alors que si T est un S-schéma et $\mathscr{E}_T \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ un quotient de $\mathscr{E}_T$, plat et de présentation finie sur T, de polynôme de Hilbert P dans les fibres, alors $\pi_{T*}\mathscr{E}_T(r) \to \pi_{T*}\mathscr{F}(r)$ est surjectif. On obtient donc un morphisme de foncteurs

$$\alpha_r : \underline{\mathrm{Quot}}^P(\mathscr{E}/X/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Grass}}^{P(r)}(\pi_*\mathscr{E}(r)/S)$$

qui envoie $\mathscr{E}_T \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ sur $(\pi_*\mathscr{E}(r))_T = \pi_{T*}\mathscr{E}_T(r) \twoheadrightarrow \pi_{T*}\mathscr{F}(r)$.

La grassmannienne est représentable par un schéma projectif lisse $G \to S$; notant $\mathscr{E}' = \pi_*\mathscr{E}(r)$ et $\mathscr{E}'_G = (\pi_*\mathscr{E}(r))_G = \pi_{G*}\mathscr{E}_G(r)$, on dispose d'une suite exacte universelle $0 \to \mathscr{N} \to \mathscr{E}'_G \to \mathscr{Q} \to 0$ de faisceaux cohérents sur G, et d'un morphisme $h : \pi_G^*\mathscr{N} \to \mathscr{E}_G(r)$ de faisceaux sur X_G obtenu par adjonction.

Nous montrerons que pour un faisceau quotient $\mathscr{E}_T \twoheadrightarrow \mathscr{F}$, on peut identifier $\mathscr{F}(r)$ au conoyau de h_T. Si l'on raisonne uniquement du côté de la grassmannienne, le conoyau $\mathscr{C} = \mathrm{coker}(h)$ n'est pas nécessairement plat, et on verra que $\underline{\mathrm{Quot}}^P(\mathscr{E}/X/S)$ s'identifie à une certaine strate d'une stratification aplatissante de $\mathscr{C}$.

2 Trois lemmes préparatoires

Pour toute la suite de l'exposé, on fixe les notations suivantes : S est un schéma noethérien, $\pi : X \to S$ est un morphisme projectif, $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Nous allons d'abord collecter un certain nombre de faits, que nous assemblerons ensuite pour montrer l'existence d'une stratification aplatissante. Quitte à choisir une immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$ et à remplacer $\mathscr{F}$ par $i_*\mathscr{F}$, on peut supposer que $X = \mathbb{P}^n_S$ et c'est ce que nous ferons dans toute la suite. Le premier lemme servira à pallier au fait que $\mathscr{F}$ n'est pas plat.

Lemme 1. *Pour tout morphisme $u : T \to S$, il existe un entier N tel que pour tout $r \geqslant N$ le morphisme de changement de base $u^*\pi_*\mathscr{F}(r) \to \pi_{T*}\mathscr{F}_T(r)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Il s'agit de voir que le morphisme naturel de $\mathscr{O}_T$-modules gradués

$$u^*\big(\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \pi_*\mathscr{F}(r)\big) \longrightarrow \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \pi_{T*}\mathscr{F}_T(r)$$

induit un isomorphisme sur les faisceaux associés. Cela revient à voir que la formation du faisceau associé à un module gradué commute au changement de base, et c'est un exercice.

Lemme 2. *Le faisceau $\mathscr{F}$ est S-plat si et seulement s'il existe N tel que pour tout $r \geqslant N$, le $\mathscr{O}_S$-module $\pi_*\mathscr{F}(r)$ est plat.*

Preuve. Par le théorème d'annulation de Serre, il existe N tel que pour tout $r \geqslant N$, le faisceau $\mathscr{F}(r)$ n'a pas d'images directes supérieures. Si $\mathscr{F}$ est S-plat, d'après le théorème de changement de base dans la cohomologie $\pi_*\mathscr{F}(r)$ est alors localement libre donc plat. Réciproquement, si $\pi_*\mathscr{F}(r)$ est plat pour tout $r \geqslant N$ alors le $\mathscr{O}$-module gradué $\oplus_{r \geqslant N} \pi_*\mathscr{F}(r)$ est plat, et le faisceau qui lui est associé, c'est-à-dire $\mathscr{F}$, l'est aussi.

Lemme 3. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) *Le nombre de polynômes de Hilbert des fibres $\mathscr{F}_s$ est fini.*

(ii) *Il existe un entier N tel que pour tous $r \geqslant N$ et $s \in S$, on a :*

  (a) $H^i(X_s, \mathscr{F}_s(r)) = 0$ *pour tout* $i \geqslant 1$,
  (b) *le morphisme de changement de base* $(\pi_*\mathscr{F}(r))_s \to H^0(X_s, \mathscr{F}_s(r))$ *est un isomorphisme.*

Preuve. D'après le théorème de platitude générique, il existe un ouvert maximal $Y_{\alpha_0} \subset S_{\text{réd}}$ sur lequel $\mathscr{F}$ est plat. En itérant avec S remplacé par $S \smallsetminus Y_{\alpha_0}$, en un nombre fini d'étapes car S est noethérien, on obtient une stratification « ensembliste » réduite $\{Y_\alpha\}$ de S, sur laquelle $\mathscr{F}$ est plat mais qui ne vérifie pas de propriété universelle. (En fait, il s'avèrera que c'est la stratification réduite associée à la stratification aplatissante.) Pour chaque α, le faisceau $\mathscr{F}|_{Y_\alpha}$ est plat donc le polynôme de Hilbert de ses fibres est localement constant. Comme les Y_α sont quasi-compacts et en nombre fini, ceci montre (i). Maintenant, pour chaque $s \in S$, d'après le théorème d'annulation de Serre pour $X_s \to \operatorname{Spec}(k(s))$, on peut choisir un entier N_s tel que $H^i(X_s, \mathscr{F}_s(r)) = 0$ dès que $r \geqslant N_s$ et $i \geqslant 1$. Par semi-continuité, pour tout s' dans un voisinage de s dans la strate Y_α contenant s, on a encore $H^i(X_{s'}, \mathscr{F}_{s'}(r)) = 0$ pour $r \geqslant N_s$, $i \geqslant 1$. Comme les Y_α sont quasi-compacts et en nombre fini, on peut choisir $N_s = N_0$ indépendant de s. On obtient ainsi la propriété (a). Notons $\pi_\alpha = \pi_{Y_\alpha}$ et $\mathscr{F}_\alpha = \mathscr{F}_{Y_\alpha}$. Grâce à l'annulation de la cohomologie ponctuelle que l'on vient d'établir, le théorème de changement de base dans la cohomologie nous dit que sur le schéma réduit Y_α, pour tous $s \in Y_\alpha$ et $r \geqslant N_0$ le morphisme de changement de base $(\pi_{\alpha*}\mathscr{F}_\alpha(r))_s \to H^0(X_s, \mathscr{F}_s(r))$ est un isomorphisme. Mais par le lemme 1, il existe $N \geqslant N_0$ tel que les morphismes de changement de base $(\pi_*\mathscr{F}(r))|_{Y_\alpha} \to \pi_{\alpha*}\mathscr{F}_\alpha(r)$ associés aux restrictions $Y_\alpha \to Y$ sont des isomorphismes, pour tous $r \geqslant N$ et α. En composant les deux isomorphismes de changements de base, on obtient la propriété (b).

Remarque. Comme $\mathscr{F}$ n'est pas plat sur S, le théorème de changement de base dans la cohomologie ne s'applique pas et on *ne* peut *pas* déduire de la propriété (b) que la formation de $\pi_*\mathscr{F}(r)$ commute au changement de base pour $r \geqslant N$.

3 Construction de la stratification aplatissante

On continue avec un schéma noethérien S, un morphisme projectif $X \to S$ et un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$. On commence par un cas particulier.

Lemme 4. *Si $n = 0$, il existe une stratification aplatissante $S' = \amalg S_e$ pour $\mathscr{F}$, où S_e est universel avec la propriété que $\mathscr{F}|_{S_e}$ est localement libre de rang e.*

Preuve. Comme $n = 0$, un module cohérent est plat si et seulement s'il est localement libre, et les polynômes de Hilbert sont des constantes correspondant au rang des modules. Soit $s \in S$ et $e = \dim_{k(s)}(\mathscr{F}_s)$. À cause de sa propriété universelle, la stratification aplatissante peut être construite localement au voisinage de s. Donc par le lemme de Nakayama appliqué deux fois, et quitte à remplacer S par un voisinage ouvert de s, il existe une suite exacte

$$\mathscr{O}_S^{\oplus f} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{O}_S^{\oplus e} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

qui de plus reste exacte après tout changement de base $T \to S$. Comme un morphisme surjectif entre deux modules localement libres de même rang est un isomorphisme, $\mathscr{F}_T$ est localement libre de rang e sur T si et seulement si $\varphi_T = 0$. Or φ est représenté par une matrice, dont les coefficients engendrent un idéal $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_S$. On a alors $\varphi_T = 0$ si et seulement si $\mathscr{I}_T = 0$, donc $\mathscr{F}_T$ est plat si et seulement si $T \to S$ se factorise par $S_e = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_S/\mathscr{I}) \subset S$. $\square$

Passons au cas n général. Choisissons N comme dans le lemme 3 (ii), et pour tout $i \geqslant 0$ posons $\mathscr{E}_i = \pi_*\mathscr{F}(N+i)$. On désigne par f un polynôme numérique de degré $\leqslant n$ variable ; un tel f est déterminé par les $n+1$ valeurs $e_i = f(N+i)$ pour $i = 0, \dots, n$, où $n = \dim(X)$.

Théorème. *Avec les notations précédentes, il existe une stratification aplatissante $S' = \amalg S_f$ pour $\mathscr{F}$. On la construit en deux étapes :*

(1) *Il existe une stratification aplatissante simultanée $\amalg W_f \to S$ pour les modules cohérents $\mathscr{E}_i$, $i = 0, \dots, n$. Pour tout changement de base $T \to S$, les $\mathscr{O}_T$-modules $\mathscr{E}_{i,T}$ sont localement libres de rang $e_i = f(N+i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ si et seulement si $T \to S$ se factorise par W_f. De plus, si $s \in W_f$, le polynôme de Hilbert de $\mathscr{F}_s$ est égal à f.*

(2) *La strate S_f est un sous-schéma fermé de W_f défini par un idéal nilpotent ; c'est une stratification aplatissante simultanée pour tous les modules cohérents $\mathscr{E}_i|_{W_f}$, $i \geqslant 0$.*

Preuve. (1) En intersectant les $n+1$ stratifications aplatissantes associées aux $\mathscr{E}_i$ par le lemme 4, on obtient une stratification aplatissante simultanée comme annoncé. La propriété additionnelle lorsque $s \in W_f$ provient du fait que d'après la condition d'annulation (a) du lemme 3, on a $P_{\mathscr{F}_s}(N+i) = \chi(X_s, \mathscr{F}_s(N+i)) = \dim H^0(X_s, \mathscr{F}_s(N+i)) = e_i = f(N+i)$ et ces $n+1$ valeurs déterminent le polynôme.

(2) Restreignons-nous maintenant à une strate W_f. Pour $i > n$, le faisceau cohérent $\mathscr{E}_i|_{W_f}$ n'a pas de raison d'être plat sur W_f, mais à cause de la propriété (b) du lemme 3, ses fibres ont une dimension constante $P_{\mathscr{F}_s}(N+i) = f(N+i)$. D'après le lemme 4, il s'ensuit que sa stratification aplatissante est une immersion fermée bijective $W_f^i \hookrightarrow W_f$. Comme W_f est noethérien, la suite décroissante

$$W_f^{n+1} \supset W_f^{n+2} \supset W_f^{n+3} \supset \dots$$

stationne sur un sous-schéma fermé $S_f \subset W_f$ qui est une stratification aplatissante simultanée pour tous les faisceaux cohérents $\mathscr{E}_i|_{W_f}$, $i \geqslant 0$. Comme les modules $(\pi_*\mathscr{F}(N+i))|_{S_f}$ sont plats pour tout $i \geqslant 0$, d'après le lemme 2, $\mathscr{F}_{S_f}$ est plat. Il s'ensuit que $\mathscr{F}_{S'}$ est plat. Il ne nous reste quà vérifier que $S' = \amalg S_f$ possède la propriété universelle du platificateur. Soit $T \to S$ tel que $\mathscr{F}_T$ est plat. Alors le polynôme de Hilbert des fibres $\mathscr{F}_t$ est localement constant, donc T est somme de sous-schémas ouverts et fermés T_f correspondants à un polynôme de Hilbert f fixé. Comme les $\mathscr{O}_T$-modules $(\pi_{T*}\mathscr{F}_T(N+i))|_{T_f}$ sont localement libres de rang $f(N+i)$ pour tout $i \geqslant 0$, le morphisme $T_f \to S$ se factorise par S_f. Donc $T \to S$ se factorise par S'. $\square$.