Singularités du schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^3$

Joao Pedro dos Santos

§ Introduction

Objectif : étudier $\mathrm{Hilb}^{\chi}(\mathbb{P}^3)$, $\chi = dm + 1 - g = \chi(m)$.

mq il y a bcp de singularités

Th (Mumford) Soit $\chi(m) = 14m - 23$. Soit $\mathcal{H}^+$ le schéma de Hilbert des courbes de poly de Hilbert χ, lisses, dans $\mathbb{P}^3$. Alors il existe W une comp. irréd. tq $\forall C \in W$ courbe, $T_C\mathcal{H}^+ \simeq k^{57}$ et $\dim W = 56$

[On est sur un corps k alg clos de car. 0]

On va faire une promenade vers la preuve de ce th. L'idée clé est d'étudier le schéma de Hilbert des courbes dans une cubique.

§ Géométrie algébrique

th Bertini : $k = \bar{k}$ (car. qcq) Soit X/k de type fini soit $N, c \in \mathbb{N}$ et G = Grass. des ss-spaces de codim c dans $\mathbb{P}^N$. Soit $f : X \to \mathbb{P}^N$ un k-morphisme et

$$Z = \{ (x, P) \in X \times G \ / \ f(x) \in P \}$$

On note enfin $q : Z \to G$ la projection. $q^{-1}(P) = f^{-1}(P)$.

Alors :

Lissité : si (f est non ram., ou si car(k)=0), ~~et~~ X est lisse } alors $q^{-1}(P)$ est lisse p.p. (i.e. pour P ds un ouvert dense)

Pureté si $\dim \overline{f(X)} \geq c$ et X irréd } alors $q^{-1}(P)$ est purement de dimension $\dim X - c$, p.p.

(à suivre)

<u>Irréductibilité</u> si

$\left.\begin{array}{l}\dim \overline{f(X)} \geq c+1 \\ \text{et } X \text{ irréd}\end{array}\right\}$ alors $q^{-1}(P)$ est irréd. p.p. ∎

<u>Réf</u> = Jouanolou.

<u>Surfaces</u>

<u>Déf</u> : une <u>surface</u> est lisse sur $k = \bar{k}$, connexe, projective.

<u>Déf</u> : soit X une surface. On définit le produit d'intersection $(- . -) : \mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ par

$$(\mathcal{L}.\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}^\vee) - \chi(\mathcal{M}^\vee) + \chi(\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{M}^\vee)$$

<u>Prop</u> ce produit est bilinéaire et symétrique ∎

<u>Réf</u> Mumford, Lectures on curves on an alg surfaces, lecture 12.

<u>Prop</u> si $D, E \in \mathrm{Div}(X)$ deux diviseurs effectifs tels que $D \cap E$ est fini, alors

$$(\mathcal{O}(D).\mathcal{O}(E)) = \#(D \cap E) = \sum_{x \in D \cap E} \dim\left(\mathcal{O}_x / (\varphi_D, \varphi_E)\right).$$ ∎

<u>Prop</u> (facile) soit $C \hookrightarrow X$ une courbe lisse (pas nécess connexe). Alors

$$(C.\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}|_C).$$

<u>Preuve</u> on a la SE $0 \to \mathcal{O}(-C) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0$ (A)

En tensorisant par $\mathcal{L}^\vee$ on trouve

$$0 \to \mathcal{O}(-C) \otimes \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{L}^\vee|_C \to 0 \qquad (B)$$

(A) entraîne $\chi(\mathcal{O}(-C)) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_C)$

(B) entraîne $\chi(\mathcal{O}(-C) \otimes \mathcal{L}^\vee) = \chi(\mathcal{L}^\vee) - \chi(\mathcal{L}^\vee|_C)$

donc

$$(C.\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}) - \chi(\mathcal{O}(-C)) - \chi(\mathcal{L}^\vee) + \chi(\mathcal{O}(-C) \otimes \mathcal{L}^\vee)$$
$$= \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}^\vee|_C) \underset{\uparrow}{=} \deg(\mathcal{L}|_C)$$ ∎

par Riemann-Roch sur C

Cor Soit $\mathcal{O}_X(H)$ ample sur X. Alors

$(C \cdot H)$ est le coeff dominant du poly. Hilb. de C.

Dém :

$m \cdot (C \cdot H) = (C \cdot mH) = \deg(\mathcal{O}(mH)|_C) = \chi(\mathcal{O}(m)|C) - \chi(\mathcal{O}_C)$ ∎

Th (RR) $\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}) + \dfrac{(\mathcal{L}.\mathcal{L}) - (\mathcal{L}.\omega^{-1})}{2}$

ou : $\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}) + \dfrac{D^2 - DK}{2}$ ∎

Prop (adjonction) soit $C \hookrightarrow X$ lisse, alors $\omega_C \simeq \omega_{X|C} \otimes \mathcal{O}(C)|_C$

Preuve on part de la suite conormale

$$0 \to \mathcal{O}(-C)|_C \to \Omega^1_{X|C} \to \Omega^1_C \to 0.$$

On déduit

$$\begin{array}{ccccc} \det(\Omega^1_{X|C}) & = & \det(\Omega^1_C) & \otimes & \det(\mathcal{O}(-C)|C) \\ \| & & \| & & \| \\ \omega_{X|C} & & \omega_C & & \mathcal{O}(-C)|C \end{array}$$

§ Cubiques

Une surface cubique est une $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ (lisse) qui est lieu de zéros d'une forme cubique.

Soit H un diviseur de X tq $\mathcal{O}(H) = \mathcal{O}(1)|_X$.

Prop a) $h^1(\mathcal{O}(mH)) = 0$

b) $\omega_X = \mathcal{O}(-H)$

c) $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$.

Dém a) $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) = H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) = 0$ est connu.

Comme on a la SE

$$\begin{array}{l} 0 \to \mathcal{O}(-X) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0 \\ \phantom{0 \to {}} \wr\!\wr \\ \phantom{0 \to {}} \mathcal{O}(-3) \end{array}$$

on tire $0 \to \mathcal{O}(-3+m) \to \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(m)|_X \to 0$

la suite exacte longue donne le résultat.

b) provient de la formule d'adjonction et du fait que $\omega_{\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}(-4)$.

c) $\chi(\mathcal{O}) = \dim H^0 - \dim H^1 + \dim H^2 = 1 - h^1(\mathcal{O}) + h^0(\mathcal{O}(-H))$ dualité de Serre

$= 1$

Prop soit X surf. cubique. Alors ① il existe un fibré en coniques $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$

② $Cl = \mathrm{Pic} = \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Z} L_i \oplus \mathbb{Z}.F \oplus \mathbb{Z}.S$

où L_i est une droite (une vraie)

F est une fibre lisse de φ

S est une section de φ (th. de Tsen)

②+ $\mathrm{Pic}^0(X) = 0$

③ $(L_i \cdot L_j) = -\delta_{ij}$, $(L_i \cdot F) = (L_i \cdot S) = 0$, $F^2 = 0$, $S^2 = -1$.

Dém pour trouver ~~…~~ ①, on trouve une droite L en comparant la dim. de l'espace de modules des cubiques avec celle de la Grassmannienne des droites. Ensuite on considère la projection :

$L = (x = y = 0) \qquad X \setminus L \xrightarrow{(x:y)} \mathbb{P}^1$

Référence : Shafarevitch, Basic Algebraic Geometry ∎

§ Schéma de Hilbert "lisse"

$f : X \to B$ projectif, B noethérien, χ poly. numérique

$\mathrm{Hilb} = \mathrm{Hilb}^{\chi}(X/B)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & X \times_B \mathrm{Hilb} \arrow[d] \\ & \mathrm{Hilb} \end{tikzcd}$$ la famille universelle.

$\Sigma = \{ y \in \mathcal{Y} \,;\, \pi \text{ n'est pas lisse en } y \}$

Déf $\mathrm{Hilb}^+ = \mathrm{Hilb} \setminus \pi(\Sigma)$

donc $h \in \mathrm{Hilb}^+$ ssi Y_h est lisse.

Soit $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^3_B$ l'hypersurface universelle de degré s, où $B = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(s)))$.

On a un morphisme de k-schémas

$$\begin{array}{ccc} \cancel{R} : \mathrm{Hilb}(\mathcal{X}/B) \longrightarrow & \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^3_B/B) = \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^3) \times B \\ & \downarrow \mathrm{proj} \\ & \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^3) \end{array}$$

qui induit $R : \mathrm{Hilb}(\mathcal{X}/B) \longrightarrow \mathcal{H}$

morphisme qui oublie $\mathcal{X}$: $(Y \hookrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^3) \mapsto (Y \hookrightarrow \mathbb{P}^3)$

R induit un morphisme propre $\mathrm{Hilb}^+ \to \mathcal{H}^+$

Prop soit $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, $\deg C = 14$, $\chi = -23$ un pt de $\mathcal{H}^+$

Alors il existe f_1, f_2, $\deg(f_i) = 4$ tq $f_i|_C \equiv 0$ et non proportionnelles.

Dém on regarde la restriction $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(4)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(4))$

Claim $h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(4)) = 35$.

$h^0(C, \mathcal{O}_C(4)) = 33$

$RR \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_C(4)) = -23 + \deg_C(\mathcal{O}_C(4))$

or $\deg \mathcal{O}_C(-4) \otimes \omega_C = -4 \times 14 + (-2\chi(\mathcal{O}_C)) < 0$

$\Rightarrow h^1(\mathcal{O}_C(4)) = h^0(\mathcal{O}_C(-4) \otimes \omega_C) = 0$.

Cor Chaque $h \in \mathcal{H}^+$ est dans l'image de R_4.

Soit $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. Alors deux cas sont possibles :

(a) soit les $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ n'ont aucun facteur commun, $(\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1(K)$.

(b) soit il existe f_0, $\deg(f_0) \leq 3$ tq $f_0|_C \equiv 0$.

Dans le cas (b), on montre que $\deg(f_0) = 3$.

On va étudier le sous-cas :

(b₀) il existe un f_0 tq $\{f_0=0\}$ est lisse.

<u>Def</u> : soit $\mathcal{X}^0 \to B^0 \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(3))) = \mathbb{P}^{19}$ (dorénavant $s=3$)
la restriction de $\mathcal{X} \to B$ où il est lisse.
Soient $\mathcal{H}_{b_0} := R_3(\mathrm{Hilb}(\mathcal{X}^0/B^0))$ et $\mathcal{H}^+_{b_0} = R_3(\mathrm{Hilb}^+(\mathcal{X}^0/B^0))$

Le théorème de Bézout implique :

<u>Fait</u> : $R : \mathrm{Hilb}^+(\mathcal{X}^0/B^0) \to \mathcal{H}^+_{b_0}$ est un homéo.

<u>Dém</u> : R est propre, surj. ISM R est injectif.
ISM $R(K)$ injectif pour $K=\bar{K}$. Or cela découle de Bézout car si X_1, X_2 sont deux cubiques distinctes de $\mathbb{P}^3$, leur intersection est de degré $3\times 3 = 9$ ne peut contenir une courbe de degré 14.
Plus précisément : $0 \to \mathcal{O}_{X_1}(-3) \to \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_1\cap X_2} \to 0$

donne $\chi(\mathcal{O}_{X_1\cap X_2}(m)) = \chi(\mathcal{O}_{X_1}(m)) - \chi(\mathcal{O}_{X_1}(m-3))$.

$$= \binom{m+3}{3} - \binom{m-3+3}{3} - \left[\binom{m-3+3}{3} - \binom{m-3}{3}\right]$$

(Ensuite on fait la m chose avec $0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_{X_1} \to 0$)

Comme $0 \to I_C \to \mathcal{O}_{X_1\cap X_2} \to \mathcal{O}_C \to 0$, on trouve

$$\underbrace{\chi(\mathcal{O}_{X_1\cap X_2}(m))}_{9m-9} \geq \underbrace{\chi(\mathcal{O}_C(m))}_{14m-23} \quad ↯$$

<u>Prop</u> $\dim \mathcal{H}^+ \setminus R(\mathrm{Hilb}^+(\mathcal{X}/B)) \leq 56$

On va calculer d'abord : $\dim \mathcal{H}^+_{b_0} = 56$.

Comme $\mathcal{H}^+_{b_0}$ est homéomorphe à $Hilb^+(\mathcal{X}^\circ/B^\circ)$, on doit calculer $\dim Hilb^+(\mathcal{X}^\circ/B^\circ)$

Soit $\eta : \operatorname{spec}(K) \to B^\circ$ un pt géométrique : $\bar{K} = K$.

La fibre $Hilb^+(\mathcal{X}^\circ/B^\circ) \times_{B^\circ} \eta$ est $Hilb^+(\mathcal{X}_\eta | K)$.

Thm (a) Il existe une composante connexe de $Hilb^+(\mathcal{X}_\eta/\eta)$ de dim $= 37$.

(b) Les autres ont dim ≤ 37.

N.B. le th + $\dim B^\circ = 19$ prouve $\dim \mathcal{H}^+_{b_0} = 56$.

Lm Soit T un K-schéma et $Z \hookrightarrow \mathcal{X}_\eta \times_K T$ un sous-schéma T-plat de poly de Hilbert $14m - 23$. (C'est donc un div. de Cartier relatif.)

Alors $t \mapsto$ classe de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta \times t}(Z_t)$ dans Pic est localement constante.

Preuve ops T connexe. Soit $\{B_0, \dots, B_6\}$ une base de $\operatorname{Pic}(\mathcal{X}_\eta)$ telle que $(B_i \cdot B_j) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $t \mapsto (B_i \cdot \mathcal{O}(Z_t))$ est une carac. d'Euler, elle est constante ☒