Introduction au groupe de travail sur la

Construction du schéma de Hilbert

Matthieu Romagny, 19 septembre 2011

Théorème (Grothendieck) *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Hilb}}_{\mathbb{P}^n/\mathbb{Z}} : (\mathrm{Sch}/\mathbb{Z})^\circ \to \mathrm{Ens}$ *défini par :*

$$\underline{\mathrm{Hilb}}_{\mathbb{P}^n/\mathbb{Z}}(T) = \{\textit{sous-schémas fermés } Z \subset \mathbb{P}^n_T \textit{ plats, de présentation finie sur } T\}$$

est représentable par un schéma, somme disjointe de schémas projectifs sur $\mathbb{Z}$*.*

L'un des objectifs principaux du groupe de travail est de démontrer le théorème ci-dessus. Il se trouve qu'on passe assez facilement de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ à n'importe quel schéma quasi-projectif X sur une base S. Si on est prêt à se contenter de la représentabilité par un espace algébrique, on peut même enlever l'hypothèse de quasi-projectivité. Enfin, on démontre essentiellement par les mêmes techniques la représentabilité du *foncteur des quotients* d'un module cohérent $\mathcal{E}$ fixé sur X, introduit ci-dessous.

1 Définition générale de $\underline{\mathrm{Hilb}}$ et $\underline{\mathrm{Quot}}$

Dans la définition du foncteur de Hilbert, il se trouve que c'est la propreté des sous-schémas fermés Z qui est cruciale. Dans les preuves, les théorèmes de finitude et de semi-continuité pour la cohomologie sont omniprésents, ce qui fait que l'hypothèse de propreté semble une inévitable pour obtenir un énoncé général. Soit $X \to S$ de présentation finie. La définition générale du foncteur de Hilbert est :

$$\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}(T) = \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-schémas fermés } Z \subset X_T \text{ propres,} \\ \text{plats et de présentation finie sur } T \end{array} \right\}.$$

Si on se donne de plus un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{E}$, alors le *foncteur des quotients de* $\mathcal{E}$ est défini par :

$$\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/X/S}(T) = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_{X_T}\text{-modules quotients de } \mathcal{E}_T \text{ plats, de présentation} \\ \text{finie sur } T \text{ et à support propre sur } T \end{array} \right\}.$$

Pour $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, on retrouve le foncteur de Hilbert.

2 Le cas projectif

Si $X \to S$ est projectif, muni d'un faisceau très ample $\mathcal{O}(1)$, rappelons (EGAIII, 7.9.4 et 7.9.11) que pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent S-plat $\mathcal{F}$, la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(\mathcal{F}_s) := \sum (-1)^i \dim_{k(s)} H^i(X_s, \mathcal{F}_s)$$

et le polynôme de Hilbert $P_{\mathcal{F}} : m \mapsto \chi(\mathcal{F}(m)_s)$ sont des fonctions localement constantes sur S.

Le fait que $P_{\mathcal{F}}$ soit localement constant montre que $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/X/S}$ est la somme disjointe des foncteurs $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{E}/X/S}$ paramétrant les quotients $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ dont le polynôme de Hilbert dans chaque fibre est égal à P, pour des $P \in \mathbb{Q}[t]$ variables. La même chose vaut pour $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$. Le théorème principal de Grothendieck est donc que si X est projectif sur S, les foncteurs $\underline{\mathrm{Hilb}}^P_{X/S}$ et $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{E}/X/S}$ sont représentables par des schémas projectifs sur S.

3 Exemple : les Grassmanniennes

Un exemple fondamental de schéma de Hilbert est celui des Grasmanniennes, classifiant les r-plans dans $\mathbb{P}^n$. Soit $Z = \mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^n$ un tel r-plan, et notons $i : Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$ l'immersion fermée. Pour calculer $P(m)$ on peut supposer $m \gg 0$ et alors

$$P(m) = \dim H^0(\mathbb{P}^n, i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) = \dim H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(m)) = \binom{r+m}{m} = \frac{m^r}{r!} + \dots$$

Il est vrai, en toute généralité, que si $r = \dim(Z)$ et $d = \deg(Z)$ alors le terme dominant de P est $dm^r/r!$ (dans notre exemple $d = 1$). On montre sans trop de difficulté que la Grassmannienne $\mathrm{Grass}(r, n)$ est le composante du schéma $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ indicée par le polynôme de Hilbert $P(m) = \binom{r+m}{m}$. Mais il n'est pas très juste de dire que la construction de $\mathrm{Grass}(r, n)$ est un sous-produit de la construction du schéma de Hilbert, d'une part car on peut donner une construction des Grassmanniennes très directe et élémentaire, d'autre part et surtout car la construction de Hilb et Quot s'appuie sur celle de la Grassmanienne.

Construction de $\mathrm{Grass}(r, n)$ par les ouverts standard, plongement de Plücker, etc.

4 Variantes, sous-produits, applications

Schémas Hom : un S-morphisme $f : X \to Y$ est déterminé par son graphe $Z := \Gamma_f \subset X \times_S Y$, qui si Y est séparé est un sous-schéma fermé de $X \times_S Y$. Si X est propre sur S alors le graphe l'est aussi donc définit un point de $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X \times_S Y}$. De cette manière, on montre que si X/S est propre et Y/S séparé alors le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ est un sous-foncteur ouvert de $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X \times_S Y}$. On montre ensuite que si X et Y sont tous deux propres, alors $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X, Y)$ est un ouvert dans $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$. Si X/S est propre, on a le cas particulier $\underline{\mathrm{Aut}}_S(X)$.

Quotient par une relation d'équivalence propre et plate. Schémas Div et schémas de Picard. On montre que $\underline{\mathrm{Div}}$ est un sous-foncteur ouvert de $\underline{\mathrm{Hilb}}$ et on utilise le morphisme $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ qui envoie D sur $\mathscr{O}_X(D)$ pour construire le schéma de Picard. Ce morphisme est représentable par des fibrés projectifs et identifie donc $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ à un quotient de $\underline{\mathrm{Div}}_{X/S}$ par une relation d'équivalence propre et plate.

Espace de modules des courbes et toutes sortes d'autres espaces de modules de variétés : en plongeant les courbes de genre $g \geqslant 2$ de manière tricanonique dans $\mathbb{P}(f_*\Omega^3_{C/S})$ qui est un fibré en $\mathbb{P}^{5g-6}$, on montre que $\mathscr{M}_g$ est isomorphe à $[H_3/\,\mathrm{PGL}_{5g-6}]$, où H_3 est l'ouvert du schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^{5g-6}$ paramétrant les courbes tricanoniques *lisses* et *géométriquement connexes*.

Espaces tangents $T_{X/S} = \underline{\mathrm{Hom}}_S(S[\epsilon], X)$ et espaces de jets $\mathscr{L}_n = \underline{\mathrm{Hom}}_S(S[t]/(t^n), X)$, puis $\mathscr{L}_\infty = \cup \mathscr{L}_n$ et intégration motivique.

Espaces $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ et théorie de Mori.

Espaces de Hilbert de points dans des variétés ; espaces de Hilbert de surfaces.

5 Foncteur $\underline{\mathrm{Quot}}$ d'un ouvert

Supposons $X \to S$ propre, de présentation finie et soit $U \subset X$ un ouvert quasi-compact sur S. Alors l'inclusion de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Hilb}}_{U/S} \to \underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$$

est une immersion ouverte. En effet, cela revient à dire que pour tout T/S et sous-schéma fermé $Z \subset X_T$, le foncteur qui à T'/T associe $\{\emptyset\}$ si $Z_{T'} \subset U_{T'}$ et $\emptyset$ sinon est représentable par un ouvert de T. Pour voir cela, notons F le fermé de X complémentaire de U, muni de la structure réduite. Comme $f : X \to S$ est propre, l'image de $Z \cap F_T$ dans T est un fermé. Notons T_0 l'ouvert le complémentaire. Alors, on a :

$$Z_{T'} \subset U_{T'} \iff Z_{T'} \cap F_{T'} = \emptyset \iff f_{T'}(Z_{T'} \cap F_{T'}) = \emptyset \iff f(Z \cap F_T) \times_T T' = \emptyset$$

$$\iff T' \to T \text{ se factorise par } T_0.$$

La conclusion est que si $\underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ est représentable, alors $\underline{\mathrm{Hilb}}_{U/S}$ est représentable par un ouvert de ce dernier.

6 Foncteur $\underline{\mathrm{Quot}}$ d'un fermé

Supposons $X \to S$ propre, de présentation finie et soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé de présentation finie sur S. Alors l'inclusion de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Hilb}}_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$$

est une immersion fermée. Il s'agit de voir que pour tout T/S et tout sous-schéma fermé $i : Z \hookrightarrow X_T$, le foncteur qui à T'/T associe $\{\emptyset\}$ si $Z_{T'} \subset Y_{T'}$ et $\emptyset$ sinon est représentable par un sous-schéma fermé de T. Or, si l'on désigne par $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux définissant Y dans X, on a $Z_{T'} \subset Y_{T'}$ si et seulement si la composée $\mathscr{I}_{T'} \to \mathcal{O}_{X_{T'}} \to i_{T',*}\mathcal{O}_{Z_{T'}}$ s'annule. Par adjonction, il revient au même de dire que le morphisme de $\mathscr{O}_Z$-modules $(i^*\mathscr{I})_{T'} \to \mathcal{O}_{Z_{T'}}$ s'annule. Le foncteur qui nous intéresse est donc l'annulateur du morphisme $i^*\mathscr{I} \to \mathcal{O}_Z$.

Or on dispose dans EGAIII d'un résultat fondamental sur les morphismes propres, qui dit la chose suivante :

Théorème : Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre, de présentation finie, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-module cohérents avec $\mathscr{G}$ plat sur Y. Alors, il existe un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent $\mathscr{N}$ unique à unique isomorphisme près, tel que le foncteur sur les Y-schémas

$$Y' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'}}(\mathscr{F}_{Y'}, \mathscr{G}_{Y'})$$

est représentable par le Y-schéma $\mathbb{V}(\mathscr{N}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathscr{N}))$.

Il s'agit de EGAIII, corollaire 7.7.8 + remarque 7.7.9(iii), appliqué au foncteur T de *loc. cit.* restreint à la catégorie des faisceaux d'*algèbres* quasi-cohérentes.

Rédaction à terminer...

Remarque culturelle : en fait, on a besoin de beaucoup moins que la propreté et le bon énoncé est un énoncé de type « restriction de Weil d'un sous-schéma fermé », si on connaît la notion de pureté (voir par ex. Raynaud et Gruson, Inventiones Math. 1971) :

Théorème : Soient $X \to S$ de présentation finie et $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme entre deux $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. On suppose que $\mathscr{G}$ est plat et pur sur S. Alors, le foncteur sur les S-schémas qui envoie S' sur $\{\emptyset\}$ si $\varphi_{S'} = 0$ et $\emptyset$ sinon est représentable par un sous-schéma fermé de S.

7 Idées de la preuve

Si S est le spectre d'un corps k, un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n$ est déterminé par son idéal homogène $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$. Ce dernier est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $k[x_0, \ldots, x_n]$, donc un point d'une certaine grassmannienne. Celle-ci est certes de dimension infinie, mais en fait I est déterminé par un choix de ses générateurs, en nombre fini, et ceux-ci vivent tous dans un sous-espace $k[x_0, \ldots, x_n]_{\leqslant r}$ de polynômes de degré $\leqslant r$.

Dans le cadre général, voici ce que donne cette idée. On considère le foncteur $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/\mathbb{P}^n_S/S}$ et on note $\pi : \mathbb{P}^n_S \to S$ le morphisme de structure. Soit $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ un faisceau cohérent quotient de $\mathcal{E}$. Si

(1) $\pi_*\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel et

(2) $\pi_*\mathcal{E} \to \pi_*\mathcal{F}$ est encore surjectif,

alors ce dernier définit un point d'une grassmannienne de faisceaux quotients de $\pi_*\mathcal{E}$. Bien sûr, ce que l'on a gagné c'est que $\pi_*\mathcal{E}$ et $\pi_*\mathcal{F}$ sont *cohérents* sur S alors que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces vectoriels de dimension infinie sur S. Il découle des théorèmes fondamentaux sur la cohomologie de l'espace projectif et sur le changement de base dans la cohomologie que pour un certain $r = r(\mathcal{F})$ assez grand, les twists $\mathcal{E}(r)$ et $\mathcal{F}(r)$ vérifient (1) et (2).

Il découle alors de la théorie de la m-régularité qu'on peut trouver un r uniforme en $\mathcal{F}$. On obtient donc un morphisme de foncteurs $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/\mathbb{P}^n_S/S} \to \underline{\mathrm{Grass}}(\pi_*\mathcal{E}(r))$. On peut montrer que $\pi_*\mathcal{E}(r) \to \pi_*\mathcal{F}(r)$ détermine $\pi_*\mathcal{E} \to \pi_*\mathcal{F}$, ce qui veut dire que ce morphisme est un monomorphisme.

On conclut la preuve de la représentabilité en montrant que ce morphisme réalise $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/\mathbb{P}^n_S/S}$ comme sous-schéma fermé de la grassmannienne, l'ingrédient principal ici étant les stratifications aplatissantes.

8 Propositions d'exposes

1) Grassmanniennes : rappels sur foncteurs representables, morphismes representables. Grassmanniennes définies par leur foncteur de points, construction par recollement d'ouverts (avec la propriete de Eisenbud-Harris th. VI.14), plongement de Plücker et projectivité. Polynôme de Hilbert d'un r-plan et démonstration du fait que $\mathrm{Grass}(r, n) = \mathrm{Hilb}^P_{\mathbb{P}^n}$. Cas particulier des espaces projectifs. Explication du pourquoi de la convention de Grothendieck. Ref : Nitsure ou SGA1 édition Springer.

2) Cohomologie de l'espace projectif :

- tout module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur $X = \mathrm{Proj}(S)$ avec S engendré par S_1 est le module associé à $M = \oplus\, \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$, Hartshorne II.5.15.
- th. de Serre : pour tout module cohérent $\mathscr{F}$ sur X, il existe n_0 tel que $\mathscr{F}(n)$ est engendré par ses sections globales pour tout $n \geqslant n_0$, Hartshorne II.5.17.
- cohomologie de $\mathscr{O}(d)$ sur $\mathbb{P}^n$, Hartshorne III.5.1.
- th. de Serre : finitude de la cohomologie et annulation après twist grand, Hartshorne III.5.2.

3) Cohomologie et changement de base. Platitude.

4) m-regularite.

5) Platitude générique, stratifications aplatissantes.

6) Construction des schémas Quot et Hilb.

7) Étude infinitésimale : espace tangent en un point.

8) Exemples ? Courbes, surfaces.