Régularité de Castelnuovo-Mumford

Cyril Demarche
17/11/2011

<u>Notations</u> k corps, $\mathcal{F}$ fsc. coh sur $\mathbb{P}^n_k$ (ou un sch. projectif ...)

§0. Motivations

Pour construire Quot, on a besoin d'un critère pour décider quand $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(d))$ est engendré par des éléments de degrés $\leq m$, de façon "uniforme en $\mathcal{F}$". (ne dépendra en fait que du poly. de Hilbert de $\mathcal{F}$).

La régularité de CM va donner une réponse.

<u>Rappel</u> (Serre) $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq m_0$, $\forall i \geq 1$, $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = 0$.

⚠ $m_0 = m_0(\mathcal{F})$.

§1. Définition et généralités

<u>Déf</u> Soit $m \in \mathbb{Z}$, on dit que $\mathcal{F}$ est m-régulier si $\forall i \geq 1$, $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0$.

<u>Rem</u> Si K/k ext de corps, $\mathcal{F}$ est m-régulier $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}\otimes K$ l'est.

Un des intérêts de cette déf est de permettre de faire des réc. sur n :

<u>Lm</u> (bien connu) : A anneau $\ni x \neq 0$, M un A-module. Alors $\mathrm{Tor}_1^A(A/(x), M) = \{m \in M, xm = 0\} = M[x]$ ∎

<u>Csq</u> si $|k| = \infty$, comme $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ est fini, il existe un hyperplan qui l'évite. En tensorisant la suite

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\times f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_H \to 0 \qquad (f = \text{éq. de } H)$$

par $\mathcal{F}(m-i)$, on obtient la SE

$$0 \to \mathcal{F}(m-i-1) \to \mathcal{F}(m-i) \to \mathcal{F}_{|H}(m-i) \to 0 . \quad (*)$$

La SE longue assure que $\mathcal{F}$ m-régulier $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_{|H}$ m-régulier ∎

Lm (Castelnuovo) Si $\mathcal{F}$ est m-régulier,

(i) si $r \geq m$, on a une surjection

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r+1))$$

(ii) si $i \geq 1$ et $r \geq m-i$ alors $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) = 0$, en particulier $\mathcal{F}$ est $m+1$ régulier.

(iii) si $r \geq m$, $\mathcal{F}(r)$ est engendré par ses sections globales, et $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) = 0$ si $i \geq 1$.

Dém ops k infini. On fait une récurrence.

Si $n=0$ il ne se passe rien.

Si $n \geq 1$, $\exists H \subset \mathbb{P}^n_k$ hyperplan disjoint de $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$

Alors $\mathcal{F}_{|H}$ est encore m-régulier, et $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}_k$.

Prouvons (ii) par réc. sur r. Si $r = m-i$ c'est OK par déf.

Si $r > m-i$, par la SE longue pour $(\star)$ on a

$$\underbrace{H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r-1))}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{par réc sur } r}} \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \to \underbrace{H^i(H, \mathcal{F}_H(r))}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{par réc sur } n}}$$

ce qui mq $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) = 0$.

Prouvons (i). On a le diag. à ligne inférieure exacte :

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^0(H, \mathcal{O}(1)) \otimes H^0(H, \mathcal{F}_H(r)) \arrow[d, "\text{surj par réc sur } n"] \\
H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \arrow[r, "\beta"] & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r+1)) \arrow[r] & H^0(H, \mathcal{F}(r+1))
\end{tikzcd}$$

$\beta(x) = \alpha(f \otimes x)$ $f =$ éq de H.

Or $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \twoheadrightarrow H^0(H, \mathcal{O}(1))$ et de plus

$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \twoheadrightarrow H^0(H, \mathcal{F}(r))$ car $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r-1)) = 0$

(vu que $r \geq m$, via (ii)).

Ceci mq la flèche horizontale supérieure est surj. et on déduit que α est surj par une chasse au diagramme facile.

Prouvons (iii). En itérant (i), on a $\forall p \geq 0$ $\forall r \geq m$,
$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(p)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \twoheadrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r+p))$
Or $\mathcal{F}(r+p)$ est engendré par ses sections globales si $p \gg 0$ (Serre) ; on déduit que $\mathcal{F}(r)$ est engendré par ses sections globales, en regardant les tiges en x, et en identifiant $\mathcal{O}(p)_x \simeq \mathcal{O}_x$). ∎

Cor Si $\mathcal{F}_H$ est m-régulier et si pour un $r \geq m$, on a $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \twoheadrightarrow H^0(H, \mathcal{F}_H(r))$ alors c'est encore surjectif pour $r+1$.

Ex : $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ est m-régulier ssi $m \geq -r$.

Rem : si $\mathcal{F}$ est m-régulier, (i) assure que $\Gamma_*(\mathcal{F})$ est engendré par des elts de degrés $\leq m$.

§2 Le th de Mumford

Th (Mumford 1966) Soient $p, n \geq 0$. Alors $\exists F_{p,n} \in \mathbb{Q}(x_0, \dots, x_n)$ tel que pour tout corps k et tout $\mathcal{F} \in Coh(\mathbb{P}^n)$ isom. à un ss-faisceau de $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ tq $\chi(\mathcal{F}(r)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{r}{i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, le faisceau $\mathcal{F}$ est m-régulier avec $m = F_{p,n}(a_0, \dots, a_n)$.

Dém ops k infini. On fait une récurrence sur n.
Si $n=0$, $F_{p,0} = 1$ convient. Si $n \geq 1$, soit $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} / \mathcal{F}$.
Soit H hyperplan disjoint de $Ass(\mathcal{G})$ et $Ass(\mathcal{F})$,
Puisque $Tor_1^{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_H, \mathcal{G}) = 0$, on a (cf SE (★)) une SE

$$0 \to \mathcal{F}_H \to \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_H \to \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_H / \mathcal{F}_H \to 0$$

Ainsi $(H, \mathcal{F}_H)$ vérifie les hyp du th.
On considère la suite $0 \to \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{h} \mathcal{F} \to \mathcal{F}_H \to 0$
Alors $\chi(\mathcal{F}_H(r)) = \chi(\mathcal{F}(r)) - \chi(\mathcal{F}(r-1))$
$= \sum a_i \binom{r}{i} - \sum a_i \binom{r-1}{i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{r-1}{i-1}$

qui s'écrit $\sum_{j=0}^{n-1} b_j \binom{r}{j}$ avec $b_j = g_j(a_0,\dots,a_n)$

où $g_j \in \mathbb{Z}[X_0,\dots,X_n]$, $g_j(X_0,\dots,X_n) = \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j+1} X_i$

Par l'hyp de réc pour H, $\exists\, F_{p,n-1} \in \mathbb{Q}[X_0,\dots,X_{n-1}]$ tel que $\mathcal{F}_H$ est m_0-régulier avec $m_0 = F_{p,n-1}(b_0,\dots,b_{n-1})$.
$= F'_{p,n-1}(a_0,\dots,a_n)$.

Pour construire $F_{p,n}$ soit $m \geq m_0 - 1$. On a une SE :

$$0 \to H^0(\mathcal{F}(m-1)) \to H^0(\mathcal{F}(m)) \to h^0(H, \mathcal{F}(m)) \to H^1(\mathcal{F}(m-1)) \to$$
$$\to H^1(\mathcal{F}(m)) \to \underbrace{H^1(H, \mathcal{F}(m))}_{=0}$$

et $H^i(\mathcal{F}(m-1)) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{F}(m)) \quad \forall i \geq 2$. (Δ)

Par le th de Serre, $H^i(\mathcal{F}(m)) = 0$ si $i \geq 1$ et $m \gg 0$, donc via (Δ) en fait $H^i(\mathcal{F}(m)) = 0$ si $i \geq 2$ et $m \geq m_0 - 1$. $(\diamond)$

De plus la surj. $H^1(\mathcal{F}(m-1)) \to H^1(\mathcal{F}(m)) \to 0$ montre que la suite $(h^1(\mathcal{F}(m)))_{m \geq m_0-1}$ est décroissante. Elle l'est en fait strictement, car si $h^1(\mathcal{F}(m)) = h^1(\mathcal{F}(m-1))$
$\boxed{\text{Fait 1}}$
alors $H^0(\mathcal{F}(m)) \twoheadrightarrow H^0(H, \mathcal{F}(m))$ et par le cor. au lm de Castelnuovo, on a : $H^0(\mathcal{F}(j)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{F}_H(j)) \quad \forall j \geq m$.

Mais alors $h^1(\mathcal{F}(j)) = h^1(\mathcal{F}(j+1)) \quad \forall j \geq m$

et enfin $= 0$ puisque $= 0$ à l'infini. D'où fait 1.

<u>Fait 2</u> $\exists\, P \in \mathbb{Q}[X_0,\dots,X_n]$ (indép. de $\mathcal{F}$ et k) tel que $h^1(\mathcal{F}(m_0)) \leq P(a_0,\dots,a_n)$

<u>dém</u> : puisque $\mathcal{F} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, on a

$$h^0(\mathcal{F}(r)) \leq p\, h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = p \binom{n+r}{r}$$

En outre $h^i(\mathcal{F}(r)) = 0$ si $\forall\, i \geq 2$ et $r \geq m_0 - 2$, cf $(\diamond)$.

donc $h^1(\mathcal{F}(m_0)) = h^0(\mathcal{F}(m_0)) - \chi(\mathcal{F}(m_0))$

$$\leq p\binom{n+m_0}{n} - \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{m_0}{i}$$

Comme $m_0 = F'_{p,n-1}(a_0, \dots, a_n)$, on trouve un P. ■

On déduit des faits 1 et 2 que
$h^1(\mathcal{F}(m)) = 0$ si $m \geq F'_{p,n-1}(a_0, \dots, a_n) + P(a_0, \dots, a_n)$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est m-régulier avec $m = F_{p,n}(a_0, \dots, a_n)$, où
$F_{p,n} = F'_{p,n-1} + P$ ■

§ 3. Compléments

* le th est faux sans l'hypothèse $\mathcal{F} \subset \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$.
Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}(d) \oplus \mathcal{O}(-d)$ sur $\mathbb{P}^1$, alors $\chi(\mathcal{F}(m)) = 2(m+1)$
indép de d. Mais $\mathcal{F}$ est m-régulier ssi $m \geq d+1$.

* si on remplace $\mathbb{P}^n$ par un schéma projectif,
on a le m̂ énoncé pour les $\mathcal{F} \subset \oplus \mathcal{O}_X$

* quelques résultats explicites :
Déf si $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ sch. projectif, la <u>régularité de X</u> est

$$\mathrm{reg}(X) = \inf\{m \in \mathbb{Z},\ \mathcal{I}_X \text{ est } m\text{-régulier}\}$$

<u>Th</u> (Bayer-Stillman) si X est inter. complète de
degrés $d_1, \dots, d_e$ alors $\mathrm{reg}(X) = d_1 + \dots + d_e - e + 1$

<u>Th</u> (Gruson-Lazarsfeld-Peskine) $X = C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ courbe
intègre de degré d, alors $\mathrm{reg}(C) \leq d - n + 2$.

Conj (Eisenbud-Goto) si X proj ~~lisse~~ irréd non dégénérée
dans $\mathbb{P}^n$, alors $\mathrm{reg}(X) \leq \deg(X) - \mathrm{codim}(X) + 1$.